

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Ekvationen

$$z^4 + 4z^3 - 8z + 20 = 0$$

har roten $z = 1 - i$. Lös ekvationen fullständigt. (0.6)

- b) Uttryck e^{ix} i cosinus- och sinusfunktioner av x , och använd detta uttryck för att härleda Eulers formler. (0.4)

2. a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} - 2^x}{3 \cdot 2^x + 3 \ln x}$. (0.3)

- b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$. (0.2)

- c) Beräkna $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3^k}{4^k}$. (0.3)

- d) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$. (0.2)

3. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig respektive deriverbar i en punkt a . (0.3)

- b) Visa att om f är deriverbar i a så är f kontinuerlig i a . Ge exempel på att omvändningen inte gäller (och motivera!). (0.3)

- c) Bestäm konstanterna A och B så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 + 3, & x \geq 1, \\ B \ln x, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

blir deriverbar i $x = 1$. (0.4)

4. a) Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{1 - \cos 3x}. \quad (0.6)$$

- b) Bestäm Maclaurinpolynomet $p_9(x)$ av ordning 9 till funktionen

$$f(x) = e^{x^3} - e^{-x^3}. \quad (0.4)$$

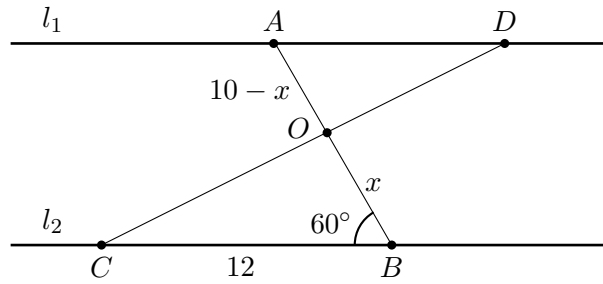
VAR GOD VÄND!

5. a) Ange formeln för derivatan av en produkt av två funktioner, och bevisa sedan denna formel genom att utgå från derivatans definition. (0.4)

b) Bestäm, för varje värde på konstanten a , antalet reella rötter till ekvationen

$$x(\ln x)^2 = a. \quad (0.6)$$

6. Mellan två parallella tegelmurar, l_1 och l_2 , är det uppsatt ett staket AB med längden 10 meter. Vinkeln mellan detta staket och l_2 är 60° . Ett andra staket CD , som korsar det första, skall byggas från punkten C på l_2 , som ligger 12 meter från punkten B , till någon punkt D på l_1 (se figuren).



Låt O beteckna skärningspunkten för staketerna, och låt x ange avståndet mellan O och B . För vilket värde på x gäller det att summan av areorna av trianglarna AOD och BOC blir så liten som möjligt?

LYCKA TILL!