

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

Ange särskilt lokala extrempunkter och eventuella asymptoter.

2. Beräkna nedanstående gränsvärden (0.2 poäng styck):

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2 + 3x) - \ln x) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + 2x} \right) \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + 2x} \right) & & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos 2x}{\ln x}. \end{array}$$

Glöm inte att motivera dina lösningar!

3. a) Lös ekvationen $z^4 = -2 + 2\sqrt{3}i$. Svara på formen $a + bi$. (0.6)
b) Rita ut de z i komplexa talplanet som samtidigt uppfyller de båda olikheterna $|z + i| \leq 2$ och $\text{Im } z \geq \text{Re } z$. (0.4)
4. Skriv upp Maclaurins formel med Lagranges restterm. Bestäm sedan Maclaurinpolynomet $p_2(x)$ av ordning 2 till $f(x) = \sqrt{1+x}$, och visa att

$$|f(x) - p_2(x)| < 5 \cdot 10^{-2} \quad \text{då } |x| < \frac{1}{2}.$$

Bestäm slutligen Maclaurinpolynomet $p_4(x)$ av ordning 4 till $g(x) = \sqrt{1+x \sin x}$.

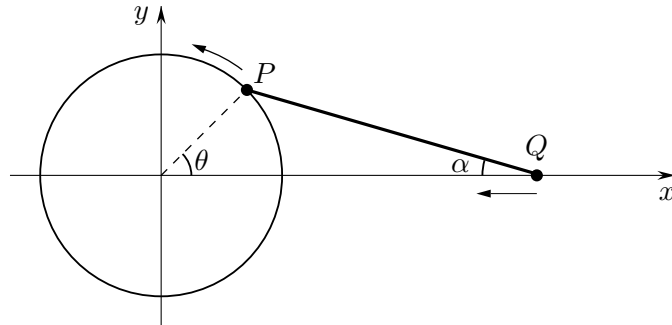
5. a) Formulera medelvärdessatsen och förklara dess innehåll med en figur. Bevisa sedan, med hjälp av medelvärdessatsen, att om en funktion definierad på ett intervall har en derivata som är negativ så är funktionen strängt avtagande. (0.5)
b) En rektangel har sidorna parallella med koordinataxlarna och hörnen på ellipsen

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Bestäm rektangelns största möjliga area. (0.5)

VAR GOD VÄND!

6. a) Härled derivatan av $\arcsin x$. (Du får lov att utgå från derivatan av sinus.) (0.3)
- b) En 5 meter lång stav är i den ena änden fäst längst ut på ett roterande cirkelformat hjul (fästpunkt P) med radie 2 meter och medelpunkt origo. Stavens andra ände Q glider fram och tillbaka längs x -axeln i takt med att hjulet roterar. Rotationshastigheten antas vara 10 radianer per sekund (moturs). Med vilken hastighet ändras vinkeln α i figuren vid den tidpunkt då vinkeln θ i figuren är $\pi/4$ radianer? (0.7)



LYCKA TILL!