

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna nedanstående gränsvärden. (0.2p/styck)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x - 3 \cdot 4^x}{4^{x+2} + x^3} & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} & \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x} \\ \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos 3x}{\ln(1+2x)} & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x}. \end{array}$$

2. a) Låt $f(x) = \sqrt{1 + \sin 3x}$. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkt på kurvan där $x = 0$. (0.4)

b) Rita grafen till funktionen

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter. (0.4)

c) Visa att $e^\pi > \pi^e$. (Går det att utnyttja grafen i b)? (0.2)

3. a) Polynomet $p(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8$ har ett rent imaginärt nollställe $z = bi$ (b reellt). Bestäm samtliga nollställen till $p(z)$. (0.6)

b) Lös ekvationen $(z - 4)^4 = -4$. Svara på formen $a + bi$. (0.4)

4. a) Beräkna Maclaurinpolynomet $p_2(x)$ av grad 2 till $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Visa att $|f(x) - p_2(x)| < 2 \cdot 10^{-4}$ om $|x| < 10^{-1}$. (0.5)

b) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^{x/3} - (1+x)^{1/3})}{x^2 - \sin^2 x}$$

med hjälp av Maclaurinutveckling. (0.5)

5. a) Visa att

$$3x^4 > 10x^3 - 6x^2 - 9 \quad \text{för alla reella } x. \quad (0.5)$$

b) Bestäm största möjliga definitionsmängd för funktionen

$$f(x) = \arcsin(\sqrt{x}) + \arcsin(\sqrt{1-x}).$$

Avgör sedan vilka funktionsvärden f antar på denna definitionsmängd. (0.5)

6. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en halvcirkelskiva med radie 1, med hörnen A och B på själva halvcirkeln och C och D på diametern. Vidare är sidorna AB och CD parallella. Bestäm den största area en sådan fyrhörning kan ha.

LYCKA TILL!