

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100} + 4^{x-1}}{2^{2x} + \ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sin x}. \quad (0.6)$$

- b) Använd derivatans definition för att härleda derivatan till

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0. \quad (0.4)$$

2. Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = x^3 e^{-x+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.

3. a) Bestäm samtliga komplexa rötter till ekvationen

$$z^2 + (2 - 2i)z + 3 + 2i = 0.$$

Rötterna skall ges på formen $a + bi$. (0.4)

- b) Bestäm samtliga komplexa rötter till ekvationen

$$z^3 = 8.$$

Rötterna skall ges på formen $a + bi$. (0.4)

- c) För vilka positiva heltal n gäller det att det komplexa talet

$$z_n = (\sqrt{3} + i)^n$$

är reellt? (0.2)

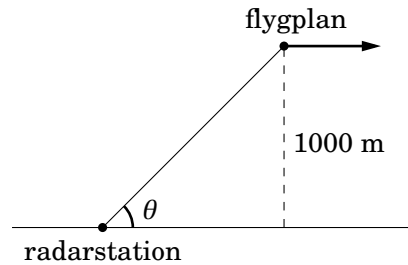
4. a) Definiera vad som menas med Maclaurinpolynomet $p_n(x)$ av ordning n till en funktion f . (0.2)

- b) Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - e^{3x/2}}{\sin(x^2)}. \quad (0.8)$$

VAR GOD VÄND!

5. a) Låt f vara en deriverbar funktion. Antag att $g(x) = 1/f(x)$ och att det för funktionen f gäller att $f(1) = 2$ och $f'(1) = 3$. Beräkna $g'(1)$. (0.3)
- b) Ett flygplan flyger på den konstanta höjden 1000 m över marken, och passerar rakt ovanför en stationär radarstation. Vid en viss tidpunkt är observationsvinkeln från stationen $\theta = \pi/4$ (se figuren), och i detta ögonblick minskar denna vinkel med hastigheten $1/10$ rad/s. Vilken fart har planet vid denna tidpunkt? (0.7)



6. Ljudintensiteten y watt per kvadratmeter på avståndet x meter från en ljudkälla med effekt P watt ges av sambandet

$$y = k \frac{P}{x^2},$$

där k är en konstant.

Two beach parties, 100 meters apart, play loud music. The first party's stereo plays 64 times as loud as the second, and the constant k can be assumed the same for both sound sources. We assume further that the sound intensity at a point is the sum of the sound intensities from the two sources. At what point along the line segment between the two parties should you place yourself if you want to be as quiet as possible, i.e., experience the lowest possible sound intensity?

LYCKA TILL!