

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Beräkna gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2e^x}{e^{x+1} + 3 \ln x}$ . (0.3)

b) Beräkna gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{x^2 - x - 2}$ . (0.4)

c) Beräkna serien  $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ . (0.3)

2. a) Lös ekvationen

$$z^2 - (4 + 2i)z + 5 + \frac{11}{2}i = 0. \quad (0.7)$$

b) Visa, genom att utgå från trigonometriska formler, att

$$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (0.3)$$

3. Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = \arctan(2x) - \ln\left(x + \frac{1}{2}\right), \quad x > -\frac{1}{2}.$$

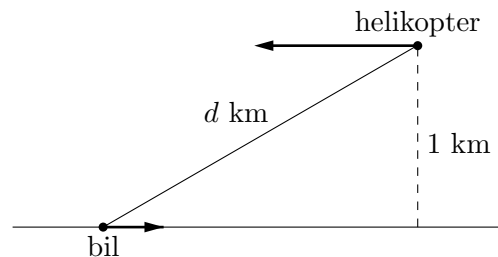
Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter samt funktionens värdemängd. Bestäm slutligen antalet lösningar till ekvationen  $f(x) = 1/2$ .

4. a) Bestäm konstanterna  $a$  och  $b$  så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} ae^{2x} + b, & x \geq 0, \\ 3x + 2, & x < 0, \end{cases}$$

blir deriverbar i  $x = 0$ . (0.4)

b) En polishelikopter flyger med hastigheten 200 km/tim på en konstant höjd av 1 km ovanför en rak motorväg. Vid en viss tidpunkt använder piloten radar för att bestämma att en mötande bil är på avståndet  $d = 2$  km från helikoptern, och att avståndet  $d$  då minskar med hastigheten 250 km/tim. Bestäm bilens hastighet vid denna tidpunkt. (0.6)



VAR GOD VÄND!

5. a) Bestäm ett polynom  $p(x)$  sådant att

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1+x}} - p(x) \right| \leq x^2$$

för alla  $x$  som uppfyller att  $|x| \leq 1/4$ . (0.7)

b) Rörelseenergin  $K$  hos en kropp med vilomassa  $m_0$  som rör sig med hastighet  $v$  ges enligt Einsteins speciella relativitetsteori av

$$K = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) m_0 c^2,$$

där  $c$  betecknar ljushastigheten. Argumentera för att det vid låga hastigheter  $v$  relativt ljushastigheten gäller att

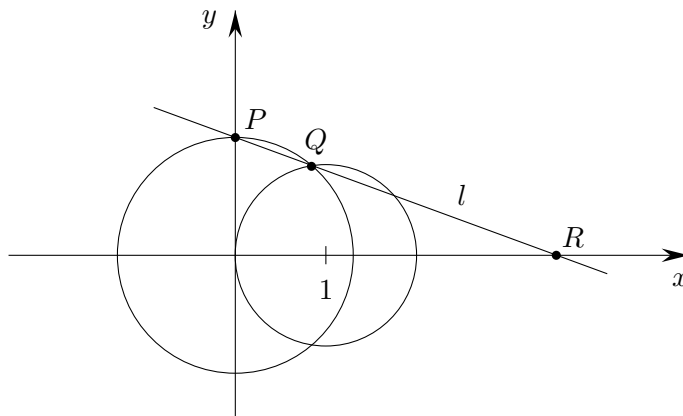
$$K \approx \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

(Approximationen är som bekant den klassiska formeln för rörelseenergi.) (0.3)

6. Låt  $Q$  vara skärningspunkten i första kvadranten mellan cirklarna

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad 0 < r < 2.$$

Låt vidare  $l$  beteckna linjen som går genom punkterna  $P : (0, r)$  och  $Q$ , och låt  $R$  vara den punkt där linjen  $l$  skär  $x$ -axeln. Vad händer med punkten  $R$  då  $r \rightarrow 0^+$ ?



LYCKA TILL!