

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Beräkna gränsvärdena

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$  (0.2)

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$  (0.3)

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 e^{\frac{1}{x}}$  (0.3)

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{\ln x}}$  (0.2)

2. a) Definiera vad som menas med derivatan  $f'(a)$ . (0.3)

b) Använd derivatans definition för att härleda derivatan av  $e^x$ . (0.3)

c) Ange en formel för att, utifrån derivatan av  $f$ , beräkna derivatan av inversen  $f^{-1}$ . Härled derivatan av  $\ln x$  genom att utgå från derivatan av  $e^x$ . (0.4)

3. a) Skriv upp Maclaurins formel med Lagranges restterm. Förklara ingående beteckningar. (0.3)

b) Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/3} - e^{x/3}}{\ln(1+2x) - 2x}. \quad (0.7)$$

4. a) Bestäm alla komplexa rötter till ekvationen  $z^4 = -2 + 2\sqrt{3}i$ . Rötterna skall anges på formen  $a + bi$ . (0.7)

b) Ange ett polynom av grad 4 med reella koefficienter som har  $z = -2 + i$  och  $z = 2i$  som nollställen. (0.3)

5. Låt

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + \frac{3}{4}}.$$

a) Bestäm en ekvation för tangenten respektive normalen till  $y = f(x)$  i den punkt på kurvan som har  $x$ -koordinat  $3/2$ . (0.3)

b) Låt  $l$  ange tangenten till  $y = f(x)$  i den punkt på kurvan som har  $x$ -koordinat  $a$ . Hur skall talet  $a$  väljas så att  $l$ 's lutning får så stort respektive så litet värde som möjligt? (En lutning kan vara positiv eller negativ.) (0.5)

c) I hur många punkter längs kurvan  $y = f(x)$  är lutningen av  $l$  lika med  $4/5$ ? (0.2)

6. En cykelväg antas följa funktionskurvan  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$ . (Enheten är kilometer i både  $x$ - och  $y$ -led.) En cyklist färdas längs vägen med konstant fart  $v$ .

a) Precis när cyklisten passerar punkten  $(1, 1)$  ökar dennes  $x$ -koordinat med hastigheten 10 km/h. Med vilken hastighet ändrar sig avståndet mellan cyklisten och origo vid denna tidpunkt? (0.6)

b) Bestäm cyklistens fart  $v$ . (0.4)

LYCKA TILL!