

INGA HJÄLPMEDEL.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. a) Bestäm gränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^x - \ln x}{2x^2 + 2^x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 1}).$$

(0.6)

b) Bestäm höger- respektive vänstergränsvärdena

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Kan man utvidga definitionsmängden till funktionen $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ till hela \mathbb{R} så att den blir kontinuerlig där? (0.4)

2. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{x - 7}.$$

Ange speciellt samtliga lokala extrempunkter och asymptoter. Bestäm slutligen värdemängden till f .

3. a) Visa att om $f'(x) > 0$ på intervallet $[0, 1]$ så är f strängt växande på $[0, 1]$. (0.3)

b) Hur många nollställen har $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ på intervallet $[0, 1]$? (0.4)

c) Hur många nollställen har $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ på intervallet $[0, \infty)$? (0.3)

4. a) Visa att om $p(z)$ är ett reellt polynom (dvs koefficienterna är reella) och α är ett nollställe till $p(z)$ så är också $\bar{\alpha}$ ett nollställe. (0.3)

b) Ekvationen $z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 4z + 4 = 0$ har en rent imaginär rot. Bestäm samtliga komplexa rötter till ekvationen. (0.7)

5. a) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)(e^{-x} - 1)}{x(1 - \cos(x))},$$

till exempel med hjälp av Maclaurinutveckling. (0.5)

b) Visa att

$$|e^{-x} - (1 - x)| \leq 3/2,$$

på intervallet $[-1, 1]$. (0.5)

Var god vänd!

6. a) Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten $(1, 0)$ och tangerar grafen till $f(x) = 1/x^2$. (0.4)
- b) Låt L vara en linje som tangerar grafen till $f(x) = 1/x^2$, $x > 0$, och går genom punkterna $P_1 = (1, a)$ och $P_2 = (b, 0)$ där $a, b > 0$. Då bildar P_1 och P_2 samt punkten $P_3 = (1, 0)$ en triangel T . Bestäm L så att arean av T blir maximal. (0.6)

LYCKA TILL!