

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar och tydliga svar.

1. Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + e^{-x}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2x^2} \quad (0.3)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} \quad (0.2)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{e^{2x} - 1} \quad (0.3)$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{2/\sqrt{x}} \quad (0.2)$$

2. a) Lös ekvationen $z^2 - (2 - 4i)z - 6 = 0$. Svara på formen $a + bi$. (0.4)

b) Lös ekvationen $iz^3 = 1$. Svara på formen $a + bi$. (0.4)

c) Vektorerna i komplexa talplanet vrider vinkeln $\pi/3$ radianer (kring origo) i positiv led, varefter de förstoras med faktorn 3. I vilket tal övergår talet $1 - i$? Svaret skall ges på formen $a + bi$, och får ej innehålla trigonometriska uttryck. (0.2)

3. a) Låt $f(x) = \ln(\ln x)$. Bestäm ekvationer för tangenten och normalen till kurvan $y = f(x)$ i den punkt på kurvan som har x -koordinaten e . (0.5)

b) Formulera medelvärdessatsen och förklara dess innehåll med en figur. (0.3)

c) Bevisa, med hjälp av medelvärdessatsen, att om en funktion definierad på ett intervall $I =]a, b[$ har en derivata som är negativ så är funktionen strängt avtagande på I . (0.2)

4. Skissera grafen till funktionen

$$f(x) = x - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right), \quad x \neq -1.$$

Ange speciellt eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.

5. a) Använd Maclaurinutveckling för att beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{x(\sin x - x)}. \quad (0.5)$$

b) Ett föremål, som vid jordytan utsätts för tyngdkraften 1 N (Newton), utsätts på höjden x meter ovanför jordytan av kraften

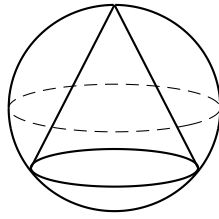
$$f(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{R}\right)^2} \text{ N,}$$

där $R = 6.4 \cdot 10^6$ (jordens radie i meter). Bestäm Maclaurinpolynomet $p_1(x)$ av ordning 1 till $f(x)$.

Antag att $f(x)$ approximeras med detta Maclaurinpolynom. Visa att om föremålet avlägsnas högst 10 km från jordytan så kommer felet av denna approximation aldrig att överstiga 10^{-5} N. (0.5)

VAR GOD VÄND!

6. En rak cirkulär kon är inskriven i ett klot med radie 1. Vilken är den största volym en sådan kon kan anta? (Volymen av en rak cirkulär kon ges av en tredjedel av produkten av basytans area och konens höjd.)



LYCKA TILL!