LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A1
2020–04–14 kl. 8–13

1. a) Vi får

$$x^3+3x^2-10x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x(x^2+3x-10)=0$$
$$\Leftrightarrow\quad x(x+5)(x-2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \text{ eller } x=-5 \text{ eller } x=2.$$

b) Det gäller att

$$\sin v=-\tfrac{\sqrt{3}}{2},\quad 0^\circ\le v<360^\circ \quad\Leftrightarrow\quad v=240^\circ \text{ eller } v=300^\circ.$$

c) $2\lg 2+\lg 3-\lg 6=\lg 2^2+\lg 3-\lg 6=\lg\frac{2^2\cdot 3}{6}=\lg 2.$

d) Om x betecknar längden av den sökta kateten så gäller det att $\tan 30^\circ=\frac{x}{5}$, vilket ger $x=5\tan 30^\circ=5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$.

e) Vi får

$$\frac{2x-1}{x+3}<1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x-1-(x+3)}{x+3}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-4}{x+3}<0 \quad\Leftrightarrow\quad -3<x<4,$$

där den sista ekvivalensen fås genom teckenstudium.

f) Det gäller att

$$9^x+3\cdot 3^x-18=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(3^x\right)^2+3\cdot 3^x-18=0$$
$$\Leftrightarrow\quad 3^x=3 \ \text{(eller } 3^x=-6) \quad\Leftrightarrow\quad x=1.$$

2. För den första ekvationen får vi

$$\cos 2x-3\cos x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\cos^2 x-1-3\cos x-1=0$$
$$\Leftrightarrow\quad \cos^2 x-\tfrac{3}{2}\cos x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos x=-\tfrac{1}{2} \ \text{(eller } \cos x=2)$$
$$\Leftrightarrow\quad x=\pm\tfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

För den andra ekvationen måste vi ha $0<x<1$, och då gäller det att

$$2\ln(1-x)-\ln x=\ln 2 \quad\Leftrightarrow\quad \ln\tfrac{(1-x)^2}{x}=\ln 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(1-x)^2}{x}=2$$
$$\Leftrightarrow\quad x^2-4x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=2-\sqrt{3} \ \text{(eller } x=2+\sqrt{3}),$$

där vi noterar att $x=2+\sqrt{3}$ ligger utanför det aktuella intervallet. Den enda lösningen är alltså $x=2-\sqrt{3}$.

3. Binomialsatsen ger att

$$\left(x^3-\tfrac{1}{2x}\right)^{14}=\sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}\left(x^3\right)^k\left(-\tfrac{1}{2x}\right)^{14-k}=\sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{14-k}x^{4k-14},$$

så vi får $4k-14=30$, dvs. $k=11$. Koeficcienten blir således $\binom{14}{11}\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{91}{2}$.

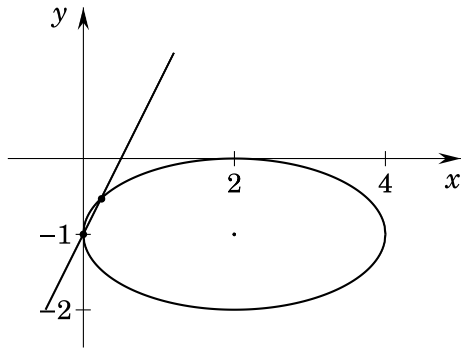
4. Ellipsen har ekvationen

$$\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y+1)^2}{1^2}=1$$

och utseendet i figuren. Linjen har ekvationen

$$y-(-3)=\tfrac{1-(-3)}{1-(-1)}(x-(-1)) \qquad \Leftrightarrow \qquad y=2x-1,$$

även den utritad i figuren. Insättning av $y = 2x-1$ i ellipsens ekvation ger



$$\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{((2x-1)+1)^2}{1^2}=1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{(x-2)^2+16x^2}{4}=1$$

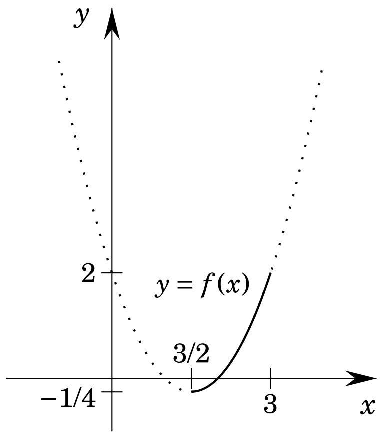
$$\Leftrightarrow \qquad 17x^2-4x=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=0 \text{ eller } x=\tfrac{4}{17},$$

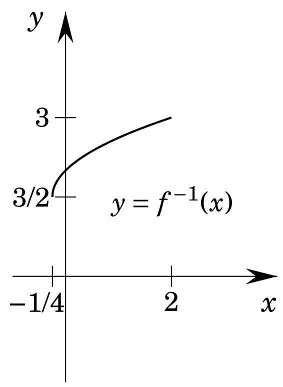
vilket efter insättning i linjens ekvation ger skärningspunkterna $(0,-1)$ respektive $\left(\frac{4}{17},-\frac{9}{17}\right)$.

5. Kvadratkomplettering ger $f(x)=x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$, dvs. det rör sig om en $y=x^2$-parabel flyttad 3/2 steg åt höger och 1/4 steg nedåt (se nedan). Vi ser att funktionen är strängt växande i t.ex. intervallet $I=[3/2,3]$ och den har då således en invers för detta intervall. Vi får $D_{f^{-1}}=V_f=[-1/4,2]$ och $V_{f^{-1}}=D_f=[3/2,3]$, och eftersom

$$y=\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{3}{2}\le x\le 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=\tfrac{3}{2}+\sqrt{y+\tfrac{1}{4}},$$

så ges inversen av $f^{-1}(x)=\frac{3}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$, $-1/4\le x\le 2$. Grafen för inversen är utritad i figuren.





6. Utnyttjar vi graf eller teckenstudium, samt tolkningen av absolutbelopp, så får vi

$$A: \quad x^2<4 \quad \Leftrightarrow \quad -2<x<2$$

$$B: \quad x<2$$

$$C: \quad x^2<x \quad \Leftrightarrow \quad 0<x<1$$

$$D: \quad |x-1|<1 \quad \Leftrightarrow \quad 0<x<2,$$

och ritar vi ut dessa intervall på tallinjen så ser vi att $A\Rightarrow B$, $C\Rightarrow A$, $C\Rightarrow B$, $C\Rightarrow D$, $D\Rightarrow A$ och $D\Rightarrow B$.