LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A1
2018–11–01 kl 8–13

1. **a)** $-1/2$

b) $25/4$

c) 3

d) $x = -4$

e) $45°$

f) $x = -3$

2. Vi namnger påståendena 1 och 2, och visar först $1 \Rightarrow 2$: Antag att AD är en bisektris, dvs. att $\angle BAD = \angle CAD$. Enligt förutsättning gäller det att $|AB| = |AC|$, så trianglarna $\triangle BAD$ och $\triangle CAD$ har alltså både en sidlängd och en vinkel lika. Då dessutom sidan AD är gemensam följer det av kongruensfall SVS att

$$\triangle BAD \cong \triangle CAD.$$

Då gäller det speciellt att $|BD| = |CD|$, dvs. att AD delar sidan BC på mitten.

För implikationen $2 \Rightarrow 1$ antar vi att AD delar sidan BC på mitten, dvs. att $|BD| = |CD|$. Återigen har vi att $|AB| = |AC|$, och då trianglarna $\triangle BAD$ och $\triangle CAD$ har sidan AD gemensam följer det att

$$\triangle BAD \cong \triangle CAD,$$

denna gång enligt kongruensfall SSS. Speciellt gäller det då att $\angle BAD = \angle CAD$, dvs. att sträckan AD är en bisektris.

3. ”Gissning” ger att $p(x)$ har nollstället $x = 1$, vilket enligt faktorsatsen innebär att $x - 1$ delar $p(x)$. Vi utför polynomdivisionen och får

$$p(x) = (x-1)(x^4 - x^2 - 2).$$

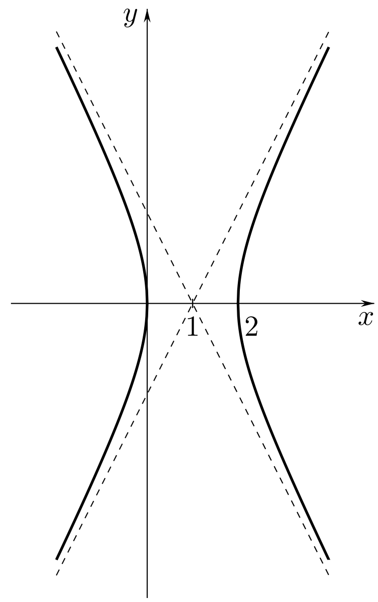
Det återstår nu att faktorisera $x^4 - x^2 - 2$, och sätter vi $t = x^2$ kan denna faktor skrivas $t^2 - t - 2$. Nollställena till denna ges av $t = 2$, $t = -1$, så faktorsatsen ger att $t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1) = (x^2-2)(x^2+1) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1)$. (Andragradsfaktorn $x^2 + 1$ saknar reella nollställen och kan inte faktoriseras vidare.) Sammanfattningsvis får vi alltså faktoriseringen

$$p(x) = (x-1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1).$$

För härledning av lösningsformeln för andragradsekvationen, se läroboken sidan 36.

4. Kvadratkomplettering ger att

$$\begin{aligned} 4x^2-8x-y^2=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4((x-1)^2-1)-y^2=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2-\frac{y^2}{2^2}=1, \end{aligned}$$



så vi ser att det rör sig om en hyperbel med medelpunkt $(1,0)$. Skärningen med koordinataxlarna, som fås genom att sätta in $x=0$ respektive $y=0$, beräknas till $(0,0)$ och $(2,0)$. Ersätter vi 1:an i högerledet med en 0:a i $(x-1)^2-y^2/2^2=1$, kan vi ta fram asymptoterna. Vi får

$$\begin{aligned} (x-1)^2-\frac{y^2}{2^2}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad y^2=2^2(x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad y=\pm 2(x-1). \end{aligned}$$

Tvåpunktsformeln ger att linjen l får ekvationen

$$y-3=\tfrac{1-3}{1-(-1)}(x-(-1)) \qquad \Leftrightarrow \qquad y=-x+2,$$

och insättning i ekvationen $4(x-1)^2-y^2=4$ för hyperbeln ger

$$4(x-1)^2-(-x+2)^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-\tfrac{4}{3}x-\tfrac{4}{3}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\tfrac{2}{3} \text{ eller } x=2.$$

Sätter vi nu in dessa x-värden i $y=-x+2$ så får vi $y=8/3$ respektive $y=0$. De sökta skärningspunkterna är alltså $(-2/3,8/3)$ och $(2,0)$.

5. Vi använder binomialsatsen och får

$$\left(x^2-\tfrac{1}{x}\right)^{10}=\left(x^2+\left(-\tfrac{1}{x}\right)\right)^{10}=\sum_{k=1}^{10}\tbinom{10}{k}(x^2)^{10-k}\left(-\tfrac{1}{x}\right)^k=$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(-1)^k\tbinom{10}{k}x^{20-2k}x^{-k}=\sum_{k=1}^{10}(-1)^k\tbinom{10}{k}x^{20-3k}.$$

För x^{11}-termen vill vi alltså att $20-3k=11 \ \Leftrightarrow\ k=3$, och insättning av $k=3$ ger koefficienten

$$(-1)^3\binom{10}{3}=-\frac{10!}{7!\,3!}=-\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}=-120.$$

6. Vi noterar först att f, då ingen definitionsmängd är angiven, antas ha största möjliga definitionsmängd, i detta fall $D_f=]1,\infty[$. Då både $\ln(x-1)$ och $\ln(x+1)$ är strängt växande, gäller detta även summan

$$f(x)=\ln(x-1)+\ln(x+1), \qquad x>1,$$

och då x närmar sig 1 antar $\ln(x-1)$, och därmed även $f(x)$, godtyckligt stora negativa värden, medan vi för stora x får godtyckligt stora positiva värden för $f(x)$. Det gäller alltså att $V_f = \mathbb{R}$, vilket innebär att $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

För att ta fram "formeln" för inversen sätter vi $y = f(x)$ och löser ut x:

$$\begin{aligned} & y = \ln(x-1) + \ln(x+1) && \Leftrightarrow && y = \ln(x^2-1) \\ \Leftrightarrow \quad & e^y = x^2 - 1 && \Leftrightarrow && x = \pm\sqrt{1+e^y}, \end{aligned}$$

där vi kan bortse från fallet $x = -\sqrt{1+e^y}$ eftersom $x > 1$. Vi kan nu avläsa inversen (med y utbytt mot x) till

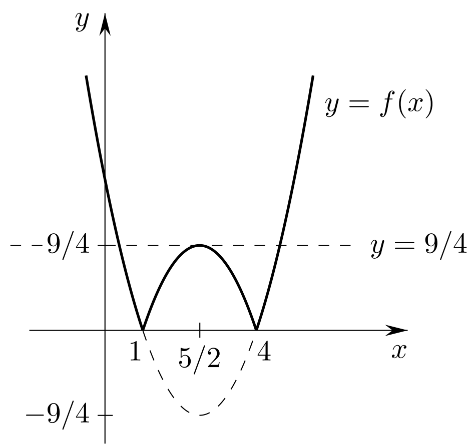
$$f^{-1}(x) = \sqrt{1+e^x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

För bevis av logaritmlagarna utifrån potenslagarna, se läroboken sidan 133.

7. Kvadratkomplettering av uttrycket innanför absolutbeloppet ger att

$$x^2 - 5x + 4 = \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4},$$

så vi ser att $y = x^2 - 5x + 4$ handlar om en $y = x^2$–kurva flyttad 5/2 steg åt höger och 9/4 steg nedåt. Vi ser också att nollställena till $x^2 - 5x + 4$ ges av $x = 1$ och $x = 4$. Absolutbeloppet i $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$ innebär att den del av kurvan $y = x^2 - 5x + 4$ vars punkter har negativt y-värde speglas i x-axeln. Vi får alltså slutligen grafen till höger. Genom att skära grafen med vågräta linjer inser vi att ekvationen $f(x) = a$ har 3 rötter precis då $a = 9/4$ (se figuren).



8. Ledvis kvadrering, utan krav på några värden för x, ger att

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+\sin 2x} = \sin x + \cos x && \Rightarrow && 1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 + \sin 2x = \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{=1} + \underbrace{2\sin x \cos x}_{=\sin 2x} && \Leftrightarrow && 0 = 0, \end{aligned}$$

vilket är sant för alla x. Vi har dock bara implikation i det första steget, och behöver därför studera för vilka x det är möjligt att få ekvivalens: Notera att det i allmänhet gäller att

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 \quad \Rightarrow \quad \pm\sqrt{1+\sin 2x} = \sin x + \cos x,$$

men att vi, eftersom rotuttrycket är större än eller lika med noll, får den önskade implikationen $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{1+\sin 2x} = \sin x + \cos x$ precis då $\sin x + \cos x \geq 0$.

Lösningarna till ekvationen ges alltså av de x för vilka $\sin x + \cos x \geq 0$. Omskrivning med hjälpvinkelmetoden ger att

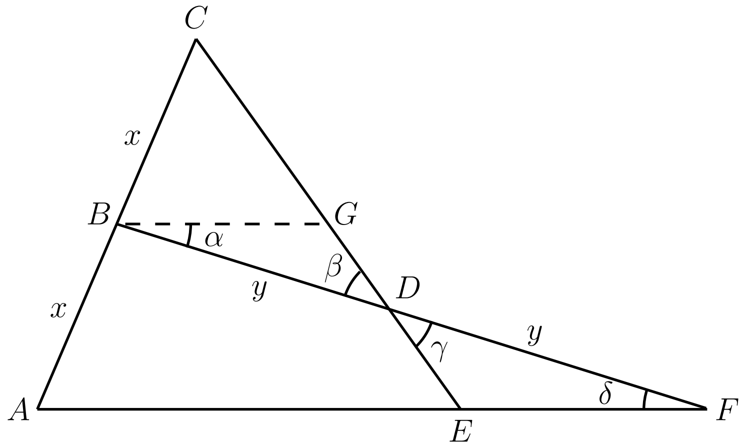
$$\sin x + \cos x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) \geq 0,$$

dvs. att $2\pi k \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2\pi k \;\Leftrightarrow\; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Inför beteckningar enligt figur. Vi ritar ut sträckan BG i figuren, parallell med sträckan AF. Topptriangelsatsen ger att $\triangle BCG \cong \triangle ACE$, så det gäller att

$$\frac{|BG|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|AC|} \qquad \Leftrightarrow \qquad |BG| = \frac{|AE||BC|}{|AC|} = \frac{4x}{2x} = 2.$$

Då BG och AF är parallella gäller det enligt parallellaxiomet att alternatvinklarna α och δ är lika, och eftersom vertikalvinklar är lika gäller det att $\beta = \gamma$. Det följer nu av kongruensfall VSV att $\triangle BDG \cong \triangle FDE$, och således att $|EF| = |BG| = 2$.



För definitionen av att två trianglar är likformiga, se geometrihäftet sidan 30.

10. Vi sätter $x = \arccos(1/3)$ och $y = \arccos(7/9)$. Vår likhet kan då uttryckas som $2x = \pi - y$. Först visar vi att $\cos 2x = \cos(\pi - y)$; det gäller att

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\cos\left(\arccos\tfrac{1}{3}\right)^2 - 1 = 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\tfrac{7}{9}, \\ \text{HL} &= \cos(\pi - y) = -\cos y = -\cos\left(\arccos\tfrac{7}{9}\right) = -\tfrac{7}{9}. \end{aligned}$$

För att sedan argumentera för att $\cos 2x = \cos(\pi - y) \;\Rightarrow\; 2x = \pi - y$ noterar vi att $0 \le x, y \le \pi/2$, vilket ger att $0 \le 2x \le \pi$ respektive $\pi/2 \le \pi - y \le \pi$. Både x och $\pi - y$ ligger alltså i intervallet $[0, \pi]$, och det följer således att

$$\begin{aligned} \cos 2x = \cos(\pi - y) \qquad &\Rightarrow \qquad \underbrace{\arccos(\cos 2x)}_{=2x} = \underbrace{\arccos(\cos(\pi - y))}_{=\pi - y} \\ &\Rightarrow \qquad 2x = \pi - y. \end{aligned}$$