LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A1
2017–10–26 kl 14–19

1. a) $\ln 24$

b) $150°$

c) $x = 1/5$

d) $x = -1$, $x = 0$, $x = 5$

e) $x = -11$

f) $x = 4$, $x = 5$

g) $60°$

h) -1

i) $3 \leq x \leq 5$

j) $x = 2$

2. a) Insättning av $x = -1$ i $p(x)$ ger att

$$p(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 + \tfrac{1}{4}(-1)^2 + a(-1) = -\tfrac{3}{4} - a = 0,$$

vilket betyder att $a = -3/4$, och efter utbrytning av faktorn x och polynomdivision med $x - (-1) = x + 1$ får vi

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 + 2x^3 + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{3}{4}x = \\ &= x\big(x^3 + 2x^2 + \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{4}\big) = x(x+1)\big(x^2 + x - \tfrac{3}{4}\big). \end{aligned}$$

Andragradsekvationen $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$ har rötterna $1/2$ och $-3/2$, och faktorsatsen ger slutligen faktoriseringen

$$p(x) = x(x+1)\big(x - \tfrac{1}{2}\big)\big(x + \tfrac{3}{2}\big).$$

b) Se läroboken sidan 133.

c) Räknelagar för logaritmer ger, då $x > 0$, att

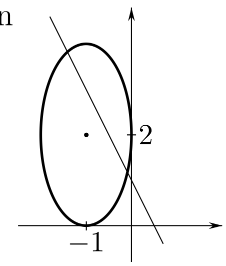
$$\begin{aligned} & (\ln x)^2 + \ln(x^2) = \ln\left(\tfrac{1}{x}\right) && \Leftrightarrow && (\ln x)^2 + 2\ln x = \ln 1 - \ln x \\ \Leftrightarrow\quad & \ln x \cdot (3 + \ln x) = 0 && \Leftrightarrow && \ln x = 0 \quad \text{eller} \quad \ln x = -3 \\ & && \Leftrightarrow && x = 1 \quad \text{eller} \quad x = e^{-3}. \end{aligned}$$

Rötterna är således $x = 1$ och $x = e^{-3}$.

3. a) Kvadratkomplettering ger att

$$x^2 + 2x + \tfrac{1}{4}y^2 - y + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1,$$

vilket betyder att vi har en ellips med medelpunkt $(-1, 2)$ och halvaxlarna 1 respektive 2. Från tvåpunktsformeln får vi att linjen har ekvationen



$$y - 1 = \tfrac{-3-1}{2-0}(x - 0) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -2x + 1,$$

och insättning i ekvationen för ellipsen ger

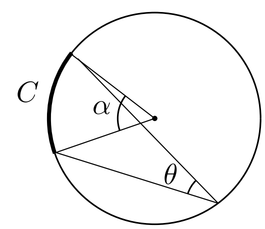
$$(x+1)^2 + \frac{((-2x+1)-2)^2}{2^2} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x^2 + 3x + \tfrac{1}{4} = 0,$$

vilken har rötterna $x = \frac{-3\pm\sqrt{7}}{4}$. Insättning av dessa värden i $y = -2x + 1$ ger motsvarande y-koordinater. Skärningspunkterna blir

$$\left(\tfrac{-3+\sqrt{7}}{4}, \tfrac{5-\sqrt{7}}{2}\right) \qquad \text{och} \qquad \left(\tfrac{-3-\sqrt{7}}{4}, \tfrac{5+\sqrt{7}}{2}\right).$$

b) Vinkeln θ, som är 0.45 radianer, är en randvinkel på cirkelbågen C, vilket enligt randvinkelsatsen betyder att medelpunktsvinkeln α i figuren är $2 \cdot 0.45 = 0.9$ radianer. Det följer nu av definitionen av radianer, eftersom vi har en cirkel med radie 1, att längden av cirkelbågen C också är 0.9.

4. a) Detta är en geometrisk summa som beräknas genom

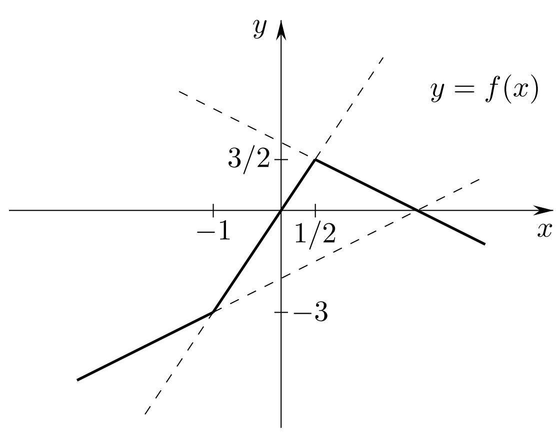


$$\sum_{k=2}^{20} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k = \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \sum_{k=0}^{18} \left(\tfrac{2}{3}\right)^k = \tfrac{4}{9} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{19} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = \tfrac{4}{3}\left(1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{19}\right).$$

b) Vi skriver först om $f(x)$ genom att dela upp i fall:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) - (2x-1) = -x + 2 & \text{då } x \geq \frac{1}{2}, \\ (x+1) + (2x-1) = 3x & \text{då } -1 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -(x+1) + (2x-1) = x - 2 & \text{då } x \leq -1. \end{cases}$$

Grafen $y = f(x)$ (heldragen) får då utseendet i figuren. (Notera att vi har olika skala på axlarna.)

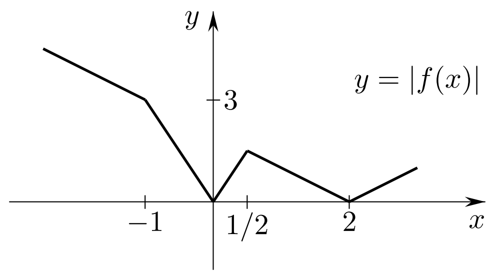


Ekvationen $f(x) = 0$ löses sedan i varje aktuellt delintervall, och vi får

$$\begin{aligned}
x \geq \tfrac{1}{2}: &\qquad -x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \text{(ok)} \\
-1 \leq x < \tfrac{1}{2}: &\qquad 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{(ok)} \\
x < -1: &\qquad x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \text{(utanför)}.
\end{aligned}$$

Vi har således rötterna $x = 0$ och $x = 2$, något som också kan avläsas i grafen genom att bestämma skärningen med x-axeln.

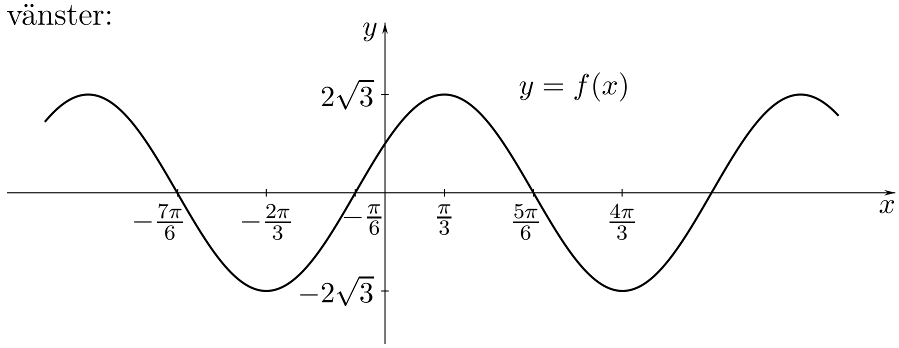
Slutligen ritar vi kurvan $y = |f(x)|$ genom att i x-axeln spegla de delar av kurvan $y = f(x)$ som ligger under x-axeln:



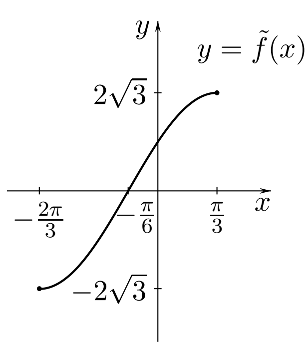
5. a) Hjälpvinkelmetoden ger att

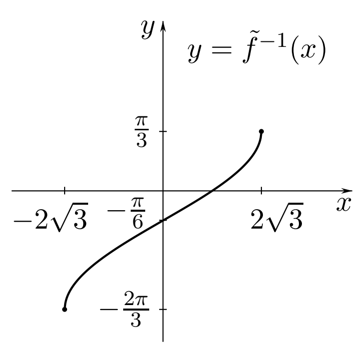
$$f(x) = \sqrt{3}\cos x + 3\sin x = 2\sqrt{3}\big(\tfrac{1}{2}\cos x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\big) = 2\sqrt{3}\sin\big(x + \tfrac{\pi}{6}\big),$$

så vi ser att det handlar om en sinuskurva med amplitud $2\sqrt{3}$ flyttad $\pi/6$ radianer till vänster:



(Återigen använder vi olika skala på de båda axlarna.) Denna funktion är ej injektiv, men studerar vi restriktionen $\tilde{f}$ av f till exempelvis intervallet $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ får vi en injektiv fuktion. Grafen för inversen till $\tilde{f}$ är utritad i figuren längst till höger:





b) En funktion f sägs vara *jämn* om det för varje x i D_f gäller att $f(-x) = f(x)$. Vidare sägs en funktion vara *udda* om det för varje x i D_f gäller att $f(-x) = -f(x)$. Vi kontrollerar funktionerna en i taget genom att sätta in $-x$: Eftersom

$$f_1(-x) = (-x) + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f_1(x)$$

följer det att f_1 är udda. För f_2 får vi

$$f_2(-x) = -x + |-x| = -x + |x|,$$

som varken är lika med $f_2(x) = x + |x|$ eller $-f_2(x) = -x - |x|$. Således är denna funktion varken jämn eller udda. Slutligen ser vi att f_3 är jämn eftersom

$$f_3(-x) = (-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x \sin x = f_3(x).$$

I det sista fallet har vi utnyttjat att sinus är udda.

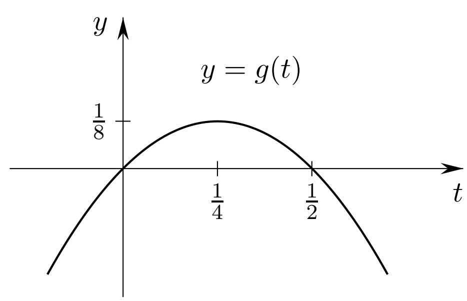
6. Vi skriver först om funktionen med hjälp av formeln för dubbla vinkeln:

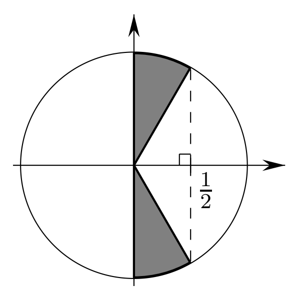
$$f(x) = \sqrt{\cos x - \cos 2x - 1} = \sqrt{\cos x - (2\cos^2 x - 1) - 1} = \sqrt{\cos x - 2\cos^2 x}.$$

Då uttrycket innanför kvadratroten måste vara större än lika med 0 vill vi lösa olikheten $\cos x - 2\cos^2 x \geq 0$. Vi gör detta genom att sätta $t = \cos x$ och först lösa motsvarande olikhet i t, dvs. $t - 2t^2 \geq 0$. Kvadratkomplettering visar att grafen till

$$g(t) = t - 2t^2 = -2\left(t - \tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{8},$$

är en "upp-och-nervänd" parabel med vertex i $(1/4, 1/8)$ som vi lätt kan rita ut. Från figuren nedan till vänster ser vi att $g(t) \geq 0$ precis då $0 \leq t \leq 1/2$. (Skärningspunkterna med x-axeln får vi genom att lösa ekvationen $g(t) = 0$.) Alternativt kan man lösa olikheten med teckenstudium.





För att ta fram vilka x-värden i intervallet $[0, 2\pi]$ som svarar mot dessa t-värden studerar vi enklast enhetscirkeln. Vi söker då de x som uppfyller att $0 \leq \cos x \leq 1/2$. Eftersom cosinusvärden avläses på den horisontella axeln, ser vi att resultatet blir alla x som uppfyller

$$\tfrac{\pi}{3} \leq x \leq \tfrac{\pi}{2} \qquad \text{eller} \qquad \tfrac{3\pi}{2} \leq x \leq \tfrac{5\pi}{3}.$$

För att slutligen ta fram största och minsta värde till f räcker det att bestämma största och minsta värde för funktionen

$$g(t) = t - 2t^2 = -2\left(t - \tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{8}, \qquad 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2}.$$

Men detta kan vi avläsa direkt i grafen ovan. Eftersom g har minsta värde 0 och största värde 1/8 följer det att f har minsta värde 0 och största värde $\sqrt{1/8} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.