LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A1
2016–10–27 kl 14–19

1. a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $x = -5$, $x = 0$

c) $\lg 3$

d) $v = 30°$, $v = 330°$

e) $(x + 1)(x - 2)$

f) $x = -\frac{1}{2}$

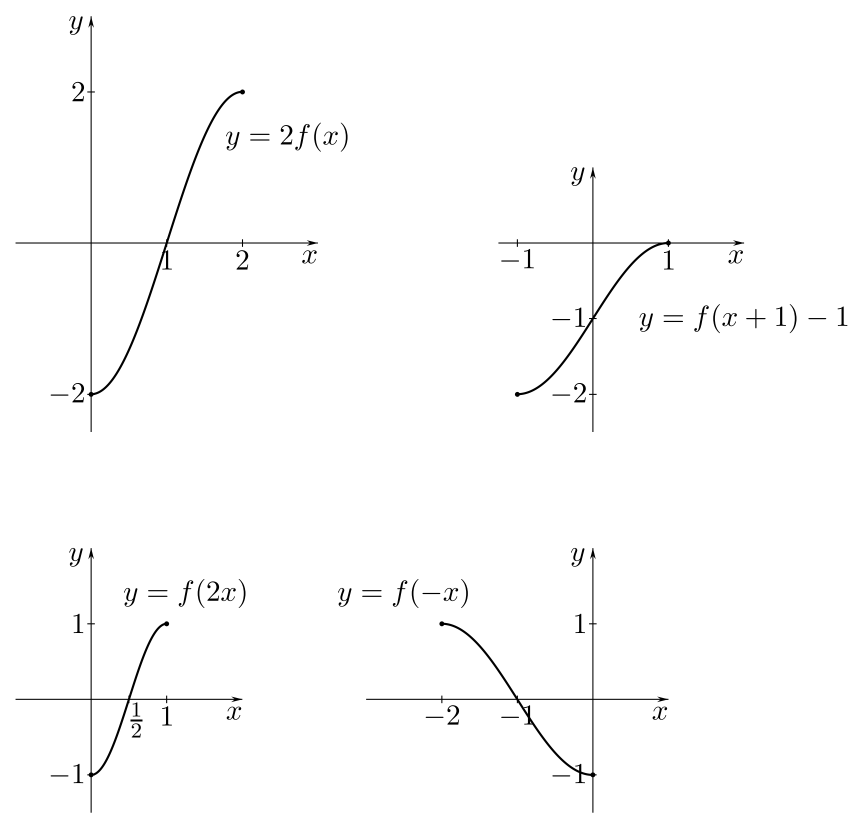
g) $60°$

h) $x = 0$

i) $1 < x < 2$

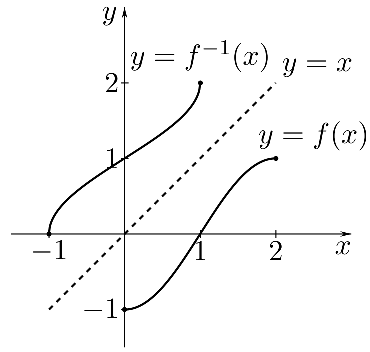
j) $x = 0$

2. a) Med hjälp av förflyttnings- och omskalningsregler får vi att $y = 2f(x)$ motsvarar en omskalning faktorn 2 i y-led, $y = f(x+1) - 1$ en förflyttning 1 steg åt vänster och 1 steg nedåt, $y = f(2x)$ en omskalning faktorn $1/2$ i x-led och $y = f(-x)$ en spegling i y-axeln:



b)

Studerar vi grafen för f ser vi att varje y-värde i värdemängden svarar mot precis ett x-värde. Således har f en invers, och grafen för inversen får vi genom att spegla $y = f(x)$ i linjen $y = x$. Nu gäller det att $D_{f^{-1}} = V_f = [-1, 1]$ och $V_{f^{-1}} = D_f = [0, 2]$.



c) Se läroboken sidan 133.

3. a)

$$
\begin{aligned}
&\ln x - \frac{2}{\ln x} = 1 &&\overset{t=\ln x}{\Leftrightarrow} && t - \frac{2}{t} = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & t^2 - t - 2 = 0 &&\Leftrightarrow && t = 2 \ \text{ eller } \ t = -1 \\
\overset{t=\ln x}{\Leftrightarrow}\quad & \ln x = 2 \ \text{ eller } \ \ln x = -1 &&\Leftrightarrow && x = e^2 \ \text{ eller } \ x = e^{-1}.
\end{aligned}
$$

b) Detta är en geometrisk summa som beräknas genom

$$
\sum_{k=2}^{20} \frac{1}{5^k} = \sum_{k=2}^{20} \left(\tfrac{1}{5}\right)^k = \left(\tfrac{1}{5}\right)^2 \sum_{k=0}^{18} \left(\tfrac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{25} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{19}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{20}\left(1 - \left(\tfrac{1}{5}\right)^{19}\right).
$$

c) Vi använder hjälpvinkelmetoden och får

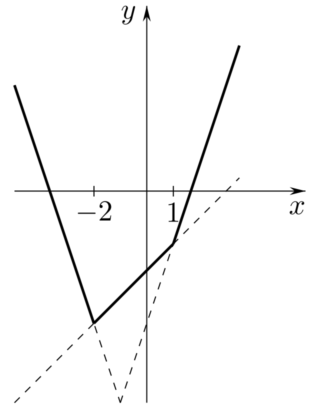
$$
\begin{aligned}
& \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = \sqrt{2} &&\Leftrightarrow && 2\left(\tfrac{1}{2}\sin 3x + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x\right) = \sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \sin\left(3x + \tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} &&\Leftrightarrow && 3x + \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\pi}{4} + 2\pi k \ \text{ eller } \ 3x + \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{3\pi}{4} + 2\pi k \\
& &&\Leftrightarrow && x = -\tfrac{\pi}{36} + \tfrac{2\pi}{3}k \ \text{ eller } \ x = \tfrac{5\pi}{36} + \tfrac{2\pi}{3}k,
\end{aligned}
$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

4. a) Vi skriver först om $f(x)$ genom att dela upp i fall:

$$
f(x) = \begin{cases}
(x-1) + 2(x+2) - 8 = 3x - 5 & \text{då } x \geq 1, \\
-(x-1) + 2(x+2) - 8 = x - 3 & \text{då } -2 \leq x < 1, \\
-(x-1) - 2(x+2) - 8 = -3x - 11 & \text{då } x < -2.
\end{cases}
$$

Grafen $y = f(x)$ (heldragen) får då utseendet i figuren. Ekvationen $f(x) = 0$ löses sedan i varje aktuellt delintervall, och vi får



$$
\begin{aligned}
x \geq 1: &\qquad 3x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{5}{3} \quad \text{(ok)} \\
-2 \leq x < 1: &\qquad x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \quad \text{(utanför)} \\
x < -2: &\qquad -3x - 11 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\tfrac{11}{3} \quad \text{(ok).}
\end{aligned}
$$

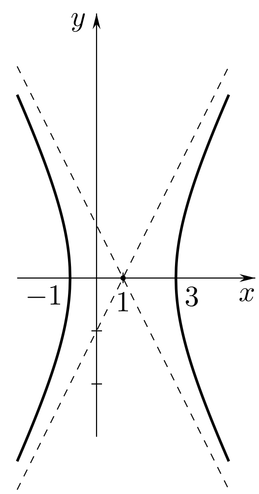
Vi har således rötterna $x = -11/3$ och $x = 5/3$, något som också kan avläsas i grafen utifrån skärningen med x-axeln.

b) Kvadrering av båda led ger $0 = 0$, vilket inte ger oss så mycket information (eftersom vi även kan ha falska rötter). Bättre är då omskrivningen

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2} = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad |x - 1| = 1 - x,$$

där den sista ekvationen löses av alla $x \leq 1$ (definitionen av absolutbelopp).

5. a) Kvadratkomplettering ger



$$
\begin{aligned}
4x^2 - 8x - y^2 - 12 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4(x-1)^2 - y^2 = 16 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1,
\end{aligned}
$$

och vi kan avläsa att det rör sig om en hyperbel med medelpunkt $(1, 0)$. Skärningarna med koordinataxlarna, $(-1, 0)$ och $(3, 0)$, får vi genom att sätta $y = 0$ (sätter vi $x = 0$ får vi ingen skärning). Avslutningsvis tar vi fram asymptoterna:

$$
\begin{aligned}
\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y^2 = 2^2 \cdot (x-1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad y = \pm 2(x - 1),
\end{aligned}
$$

vilket ger oss $y = 2x - 2$ respektive $y = -2x + 2$.

b) Eftersom arcsin endast är definierad i $[-1, 1]$, måste det gälla att

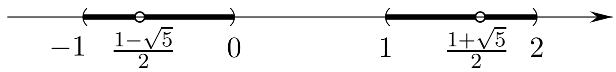
$$-1 \leq x^2 - x - 1 \leq 1,$$

dvs. att $x^2 - x \geq 0$ och $x^2 - x - 2 \leq 0$. Löser vi dessa båda olikheter (t.ex. med teckentabell) får vi

$$
\begin{aligned}
& x^2 - x \geq 0 \quad \text{och} \quad x^2 - x - 2 \leq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x(x-1) \geq 0 \quad \text{och} \quad (x+1)(x-2) \leq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \big(x \geq 1 \quad \text{eller} \quad x \leq 0\big) \quad \text{och} \quad -1 \leq x \leq 2,
\end{aligned}
$$

vilket tillsammans ger oss mängden $D_1 = [-1, 0] \cup [1, 2]$ (rita figur!).

Slutligen måste vi undanta de punkter som ger 0 i nämnaren: vi inser att $\arcsin(x^2 - x - 1) = 0$ är ekvivalent med att $x^2 - x - 1 = 0$, vilket ger oss punkterna $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, som båda ligger i D_1. Största möjliga definitionsmängd är således $D = D_1 \setminus \{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\}$, vilken illustreras i figuren nedan.



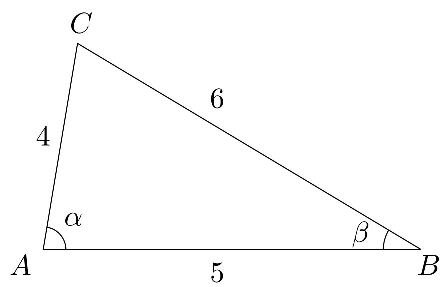
6. a) Se geometriboken sidorna 58–59.

b) Vi inför beteckningarna i figuren nedan. Använder vi cosinussatsen får vi då

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos\alpha,$$

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos\beta,$$

vilka implicerar att $\cos\alpha = 1/8$ och $\cos\beta = 3/4$.



Vi visar först att $\cos 2\beta = \cos\alpha$:

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8} = \cos\alpha.$$

Därefter noterar vi att $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi/2$ (eftersom $\cos\alpha$ och $\cos\beta$ är positiva), vilket speciellt betyder att $0 \leq \alpha, 2\beta \leq \pi$. Med denna sista observation följer det att $\cos 2\beta = \cos\alpha \;\Rightarrow\; 2\beta = \alpha$, och vi är klara.