SVAR
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

ENDIMENSIONELL ANALYS
A1 (FMAA01)
2016–01–07 kl. 08–13

1. a) $y = -(3/11)x + 13/11$.

b) $x = 1/2$.

c) a^6.

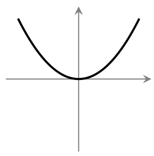
d) $-\sqrt{2}/2$.

e) -54.

f) -3.

g) $30°$.

h) Grafen till $y = x^2$ ser ut så här:



i) $-3 - \sqrt{7}$.

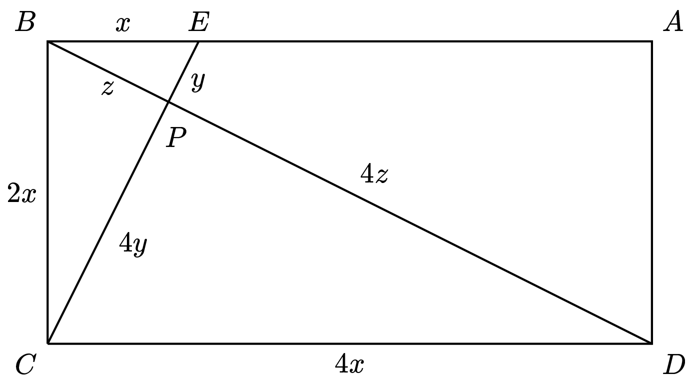
j) Lösningarna är $x = 0$ och $x = 1$.

2. a) $x = \pi/4 + k\pi/2$ där $k \in \mathbb{Z}$.

b) Lösningarna är $x = 0$ och $x = -3$.

3. a) Se kurslitteraturen.

b) Uppgiften kan lösas på många sätt. Till exempel så här:
Genom att betrakta vertikal- och alternatvinklar finner vi att $\triangle EPB$ är likformig med $\triangle CPD$. Eftersom $CD = 4BE$ och $BC = 2BE$ kan vi sätta ut längder x, y och z enligt figur.



Pythagoras sats på $\triangle EBC$ ger

$$5x^2 = x^2 + (2x)^2 = (5y)^2 = 25y^2, \quad \text{så} \quad y^2 = \frac{1}{5}x^2.$$

Pythagoras sats på $\triangle BCD$ ger

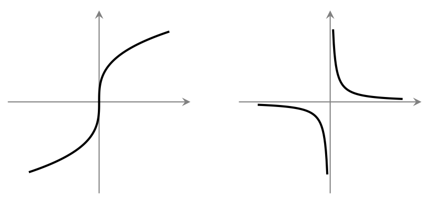
$$20x^2 = (2x)^2 + (4x)^2 = (5z)^2 = 25z^2, \quad \text{så} \quad z^2 = \frac{4}{5}x^2.$$

Alltså följer det att $y^2 + z^2 = x^2$, och omvändningen till Pythagoras sats ger att vinkeln $\angle BPE$ är rät.

4. a) B, C och D.

b) B och D.

c) Graferna till inverserna ser ut så här:



d) Endast funktionen i B är monoton.

5. a) Uttrycket är ungefär $\ln 2+\ln 5+\frac{1}{2}\ln 2+e^{\ln(2/5)}$, som enligt tabellen ungefär blir $0.69+1.61+0.5\times 0.69+2/5=3.045\approx 3.05$.

b) Det gäller att $|x-1|<1 \iff 0<x<2$ och $2|x-1|<|x+2| \iff 0<x<4$. Implikationen som skulle visas följer direkt, och det är också klart att implikationen åt andra hållet ej är sann.

För den intresserade ger vi även följande lösning till implikationen: Antag att $|x-1|<1$. Med omvända triangelolikheten får vi

$$|x+2|=|3+x-1|\geq 3-|x-1|>3|x-1|-|x-1|=2|x-1|.$$

6. a) Detta följer av additionsformlerna för cosinus och sinus,

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\\&=\frac{\cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha+\tan\beta)}{\cos\alpha\cos\beta(1-\tan\alpha\tan\beta)}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

b) Genom att lösa ut $\tan\gamma$ från den identitet vi vill visa så ser vi att det är tillräckligt att visa att om α, β och γ tillhör intervallet $(0,\pi/2)$ så är

$$\tan\gamma=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\tan(\alpha+\beta),$$

där den sista likheten kommer från additionsvinkeln i a)-uppgiften.
Men eftersom $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, $\tan(\pi/2-x)=1/\tan x$ och $\tan(-x)=-\tan x$ så är

$$\begin{aligned}\tan\gamma&=\tan\bigl(\pi/2-(-\pi/2+\alpha+\beta)\bigr)\\&=1/\tan(-\pi/2+\alpha+\beta)\\&=-1/\tan(\pi/2-(\alpha+\beta))\\&=-\tan(\alpha+\beta),\end{aligned}$$

och vi är klara.