LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
ENDIMENSIONELL ANALYS A1
2015–10–29 kl 14–19

1. a) $-\sqrt{3}/2$

b) $x = 0$, $x = \pm 1$

c) $x = 2$

d) $\ln(11/9)$

e) $x < 4$

f) $4\sqrt{2}$ cm

g) $\frac{13+5\sqrt{7}}{2}$

h) $210°$

i) -3

j) $x = 1/2$

2. a) Binomialsatsen tillsammans med potenslagar ger att

$$\left(x^2 + \tfrac{1}{2x}\right)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} (x^2)^{11-k} \left(\tfrac{1}{2x}\right)^k = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k x^{22-3k},$$

så koefficienten får vi då $22 - 3k = 7$, dvs. $k = 5$, och blir $\binom{11}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{231}{16}$.

b) Detta rör sig om en geometrisk summa, och vi får

$$\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{9} + \tfrac{2}{27} - \tfrac{2}{81} + \ldots - \tfrac{2}{3^{20}} = \tfrac{2}{3}\left(1 + \left(-\tfrac{1}{3}\right) + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^{19}\right) =$$

$$= \tfrac{2}{3} \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{20}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \tfrac{1}{2}(1 - 3^{-20}).$$

3. a)

$$\begin{aligned} e^x = 4e^{-x} + 3 \quad &\Leftrightarrow \quad e^x = \tfrac{4+3e^x}{e^x} \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 3e^x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^x = 4 \quad (\text{eller} \quad e^x = -1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 4. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \ln x + \ln(x^2) \cdot \ln(x^4) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln x + 2 \cdot 4 \cdot (\ln x)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad (\ln x)(1 + 8 \ln x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln x = 0 \quad \text{eller} \quad \ln x = -\tfrac{1}{8} \\ \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{eller} \quad x = e^{-1/8}. \end{aligned}$$

c) Se läroboken sidan 36.

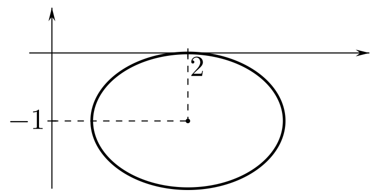
4. a) Se geometriboken sidan 15.

b) Kvadratkomplettering ger

$$x^2 - 4x + 2y^2 + 4y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 - 4 + 2(y^2 + 2y) + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + 2\left((y+1)^2 - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{(\sqrt{2})^2} + (y+1)^2 = 1,$$

och vi ser att det rör sig om en ellips med medelpunkt $(2, -1)$ och halvaxlar $\sqrt{2}$ respektive 1.

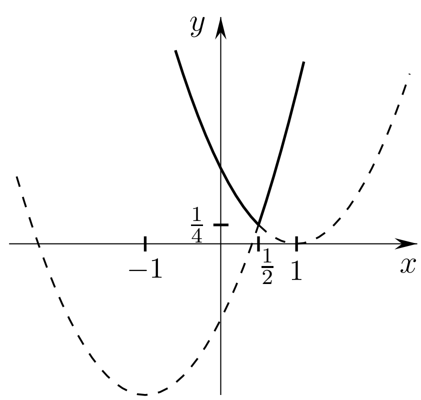


c) Se läroboken sidan 144.

5. a) Hanterar vi absolutbeloppet genom att dela upp i fall får vi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2 & \text{då } x \geq 1/2, \\ x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 & \text{då } x < 1/2, \end{cases}$$

och med förflyttningsregler tillämpade på “grundparabeln” $y = x^2$, får vi grafen nedan (heldragen). Ur denna kan vi avläsa att ekvationen $f(x) = a$ saknar lösning precis då $a < 1/4$ (den vågräta linjen $y = a$ skär då inte grafen).



Vi löser slutligen ekvationen $f(x) = 3$. I fallet $x \geq 1/2$ får vi ekvationen $(x+1)^2 - 2 = 3 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{5}$, där $x = -1 - \sqrt{5}$ ligger utanför intervallet, och i fallet $x < 1/2$ får vi $(x-1)^2 = 3 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$, där vi bortser från lösningen $x = 1 + \sqrt{3}$. De enda rötterna är alltså $x = -1 + \sqrt{5}$ och $x = 1 - \sqrt{3}$.

b) Med hjälp av formeln för dubbla vinkeln för sinus får vi

$$\sin 2x + \sqrt{6} \sin x + 2\sin^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \sin x \cos x + \sqrt{6} \sin x + 2 \sin^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \sin x (\cos x + \tfrac{\sqrt{6}}{2} + \sin x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \quad \text{eller} \quad \cos x + \sin x = -\tfrac{\sqrt{6}}{2}.$$

Ekvationen $\sin x = 0$ har lösningarna $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, så det återstår att hantera det andra fallet. Vi använder hjälpvinkelmetoden:

$$\cos x + \sin x = -\tfrac{\sqrt{6}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) = -\tfrac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x + \tfrac{\pi}{4} = -\tfrac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{eller} \quad x + \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{4\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow\quad x = -\tfrac{7\pi}{12} + 2\pi k \quad \text{eller} \quad x = \tfrac{13\pi}{12} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

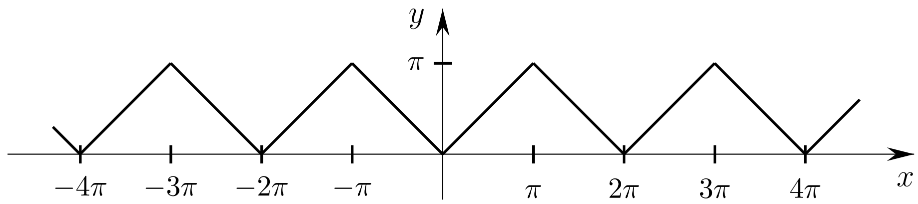
Lösningarna ges alltså av $x = k\pi$, $x = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi k$ och $x = \frac{13\pi}{12} + 2\pi k$, $\quad k \in \mathbb{Z}$.

6. a) Det gäller att

$$f\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) = \arccos\left(\cos\tfrac{3\pi}{4}\right) = \arccos\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{3\pi}{4},$$

$$f\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = \arccos\left(\cos\tfrac{5\pi}{4}\right) = \arccos\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{3\pi}{4}.$$

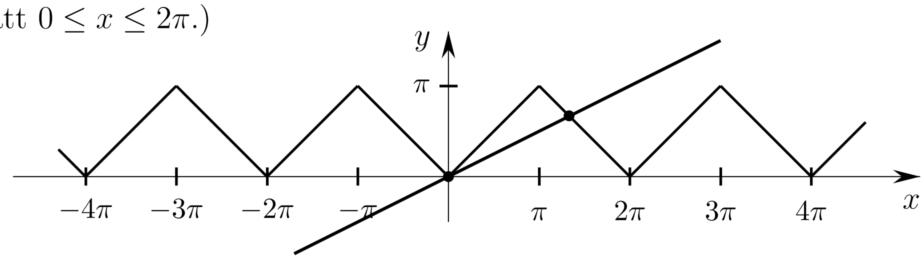
Grafen för f får följande utseende:



b) Ekvationen i uppgiften kan alternativt skrivas

$$\arccos(\cos x) = \tfrac{x}{2},$$

så vi söker (x-koordinaterna till) alla skärningspunkter mellan grafen för f och linjen $y = x/2$. Från grafen ser vi att det handlar om två skärningspunkter, dels origo och dels en punkt med x-koordinat i intervallet $[\pi, 2\pi]$. (Observera att $V_f = [0, \pi]$, så för att ekvationen $f(x) = x/2$ ska ha en lösning måste det gälla att $0 \le x \le 2\pi$.)



I intervallet $[\pi, 2\pi]$ gäller det att $f(x) = 2\pi - x$, så vi får $2\pi - x = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3}$. Ekvationen har alltså de två lösningarna $x = 0$ och $x = 4\pi/3$.

c) Ekvationen $f(x) = x/a$ har tre lösningar precis då linjen $y = x/a$ går igenom någon av punkterna $(3\pi, \pi)$ och $(-3\pi, \pi)$ (se figuren). Detta inträffar då $a = 3$ respektive $a = -3$.