1. Extrempunkt: Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{e}^{-x^2/4} - \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4} = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{2\sqrt{x^2+1}}x\Big(1-x^2\Big).$$

Alltså är $f'(x) = 0$ i punkterna $x = 0$ och $x = \pm 1$. Om vi gör en teckentabell ser vi att $x = 0$ är lokalt minimum och att $x = \pm 1$ är lokala maxima.

Asymptoter: En standardgräns från kursen visar att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Vi ser att $f(0) = 1$ och att $f(\pm 1) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-1}$. Detta visar att f tar sitt globala maximum i $x = \pm 1$, men att $x = 0$ inte är globalt minimum.

2. Denna differentialekvation är separabel då den kan skrivas på formen

$$\frac{y'}{y} = \frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1.$$

Integrerar vi båda led, får vi

$$\ln y = \ln x + x + C.$$

Detta ger

$$y = Cx\mathrm{e}^x.$$

(Här ändras konstanten C.)

Kravet $y(1) = 1$ ger $1 = C\mathrm{e}$, och $C = \mathrm{e}^{-1}$. Slutsatsen blir då

$$y = x\mathrm{e}^{x-1}.$$

3. Vi sätter

$$f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) - \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}.$$

Med denna notation ska vi visa $f(x) > 0$ för alla x.

Vi undersöker först derivatan till f:

$$f'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \frac{-1}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

Alltså är f monotont avtagande.

Sen observerar vi att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ln 1 - 0 = 0.$$

Detta betyder att f avtar monotont på hela $\mathbb{R}$ och när vi låter x gå mot höger till oändligheten, då blir 0. Alltså måste $f(x) > 0$ för $x \in \mathbb{R}$ gälla.

4. (a) Vi gör variabelbytet $u^2 = x$. Då är $\mathrm{d}x = 2u\mathrm{d}u$, och vi får

$$\int_{3^2}^{2^6} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_3^{2^3} \sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\left[\frac{2}{3}(1+u)^{3/2}\right]_3^{2^3} = \frac{4}{3}(27-8) = \frac{76}{3}.$$

(b) Vi gör variabelbytet $u = \ln x$. Då är $\mathrm{e}^u = x$ och $\mathrm{e}^u \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Detta ger

$$\int_1^{\mathrm{e}^{\pi/2}} \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin u \, \mathrm{e}^u \mathrm{d}u.$$

För att lösa detta integralet, kör vi partialintegration två gånger:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin u \, \mathrm{e}^u \mathrm{d}u &= [\sin u \, \mathrm{e}^u]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos u \, \mathrm{e}^u \mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{\pi/2} - \left([\cos u \, \mathrm{e}^u]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \sin u \, \mathrm{e}^u \mathrm{d}u \right) \\ &= \mathrm{e}^{\pi/2} + 1 - \int_0^{\pi} \sin u \, \mathrm{e}^u \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Detta ger

$$\int_0^{\pi/2} \sin u \, \mathrm{e}^u \mathrm{d}u = \frac{1 + \mathrm{e}^{\pi/2}}{2}.$$

5. (a) För att använda kvottestet beräknar vi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| \frac{4^{n+1} x^{2n+2}}{2n+2} \right|}{\left| \frac{4^n x^{2n}}{2n} \right|} = \lim_{n\to\infty} 4|x|^2 \frac{2n}{2n+2} = 4|x|^2.$$

Altså konvergerar potensserien absolut när $|x| < 1/2$.

Vi kollar sen ändpunkterna $x = \pm 2$ för sig:

$$x = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \implies \text{konvergens.}$$

$$x = -1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \implies \text{konvergens.}$$

Alltså konvergerar serien för $x \in [-2, 2]$.

(b) Vi ser att

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-4x^2)^n = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1+4x^2} - 1 \right) = \frac{-4x}{1+4x^2}.\end{aligned}$$

I sista steg använde vi att $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots$.

Därmed är

$$f(x) = \int \frac{-4x\mathrm{d}x}{1+4x^2} = \frac{-1}{2} \int \frac{(8x\mathrm{d}x)}{1+4x^2} = \frac{-1}{2} \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1+4x^2} + C.$$

Här gjorde vi variabelbytet $u = 4x^2$ i ett av stegen. Slutligen, då $f(0) = 0$, får vi $C = 0$.

6. (a) Vi beräknar

$$\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \lim_{R\to\infty} \left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_a^R = \frac{1}{1-s} \lim_{R\to\infty} \left(R^{1-s} - a^{1-s}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{(s-1)a^{s-1}} & s > 1 \\ \infty & s \le 1 \end{cases}.$$

Detta svarar även på frågan om konvergens.

(b) Detta följer som i beviset för integraltestet.

(c) Vi använder nu det vi gjorde i (b), och får

$$(s-1)\int_2^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} \le (s-1)\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^s} \le (s-1)\int_1^N \frac{\mathrm{d}x}{x^s}.$$

Låter vi $N \to \infty$ får vi

$$(s-1)\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s} \le (s-1)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \le (s-1)\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s}.$$

Från (a) får vi att

$$\frac{1}{2^{s-1}} \le (s-1)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \le 1.$$

Instängningssatsen ger nu att när $s \to 1^+$ så får vi

$$(s-1)\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s} \longrightarrow 1.$$

Om vi sätter nedre summationsgräns till $n = 1$ ändrar inte detta gränsvärdet.