Lösningsförslag. Analys 1. Tentamen 2012-01-11
Anders Olofsson

Uppgift 1. Taylors formel ger att

$$e^x = 1 + x + e^\xi x^2/2$$

för något tal ξ mellan 0 och x. Detta ger olikheten $e^x \geq 1 + x$ för $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Uppgift 2. Formel för dubbla vinkeln och känt standardgränsvärde ger att

$$\frac{\cos(2x) - 1}{x^2} = -2\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 \to -2$$

då $x \to 0$.

Vi betraktar nu gränsvärdet i **b)**. Kom ihåg Taylorutvecklingarna

$$\log(1 + x) = x - x^2/2 + O(x^3) \quad \text{och} \quad \sin x = x + O(x^3)$$

då $x \to 0$, där log är den naturliga logaritmen. Tillämpning av dessa utvecklingar ger att

$$\frac{\log(1 + x) - \sin x}{x^2} = -1/2 + O(x)$$

då $x \to 0$. Gränsvärdet i **b)** är $-1/2$. $\square$

Uppgift 3. Användning av formler för dubbla vinkeln ger att

$$\sin^4(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x).$$

Integration ger nu

$$\int_0^{2\pi} \sin^4(x)dx = \frac{3}{8} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{4},$$

där vi använt egenskapen för kosinusfunktionen att

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)dx = 0$$

för $m = 1, 2, \ldots$. $\square$

Uppgift 4. Observera först att

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1.$$

Variabelbytet $t = x + 1$ ger nu att

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}dx = \int_0^2 \frac{t - 1}{\sqrt{t^2 + 1}}dt = \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}dt - \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}dt$$

$$= [\sqrt{t^2 + 1}]_0^2 - [\log(t + \sqrt{t^2 + 1})]_0^2 = \sqrt{5} - 1 - \log(2 + \sqrt{5}),$$

där log är den naturliga logaritmen. $\square$

Uppgift 5. Derivering med huvudsats ger differentialekvationen

$$f'(x) = 2f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

för funktionen f. Notera också att $f(0) = 5$. Härav följer att $f(x) = 5e^{2x}$ för $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Uppgift 6. Serien är absolutkonvergent pga geometriskt avtagande. Kom ihåg den geometriska serien

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

Multiplikation med x^2 och sedan derivering ger

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n,$$

vilket förenklas till

$$\frac{2-x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n$$

för $|x| < 1$. Vi har nu att

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{3^n} = \frac{2-(-1/3)}{(1-(-1/3))^2} = \frac{21}{16}.$$

□

Uppgift 7. Kom ihåg Taylorutvecklingen för sinusfunktionen:

$$\sin x = x - x^3/6 + O(x^5)$$

då $x \to 0$. Härav följer att

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = x - \frac{1}{18}x^3 + O(x^5)$$

då $x \to 0$. Från denna utveckling ser vi att gränsvärdet L existerar om och endast om $a = 1$, samt att $L = -1/18$ om $a = 1$. □