Lösningsförslag. Analys 1. Tentamen 2011-12-19

Anders Olofsson

Uppgift 1. Funktionen f är positiv på $(0,\infty)$ och har gränsvärden

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 \quad \text{och} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

Eftersom f också är glatt följer av sats att f har största värde på $(0,\infty)$. Detta största värde måste vidare antas i en kritisk punkt. En derivering ger

$$f'(x) = 2x(1-x)e^{-2x}, \quad x > 0.$$

Det är härav klart att f har enda kritiska punkt $x = 1$. Funktionen f har största värde $f(1) = e^{-2}$ på intervallet $(0,\infty)$. $\square$

Uppgift 2. Vad gäller gränsvärdet **a)** har vi att

$$\frac{e^{2x}-1}{x} = 2\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x} \to 2$$

då $x \to 0$ enligt standardgränsvärde.

Observera att summan i gränsvärdet **b)** är en Riemannsumma för integralen

$$I = \int_0^1 x\sin(\pi x)dx.$$

Integralen I beräknar vi med partiell integration enligt

$$I = \Big[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}x\Big]_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}.$$

Känd sats om Riemannsummor för kontinuerlig funktion ger nu att

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin(\frac{\pi k}{n}) = I = \frac{1}{\pi}.$$

$\square$

Uppgift 3. Vi kvadratkompletterar integrandens nämnare enligt

$$x^2+4x+5 = (x+2)^2+1.$$

Variabelbytet $t = x+2$ ger nu att

$$\int_{-2}^{-1}\frac{x+1}{x^2+4x+5}dx = \int_0^1\frac{t-1}{t^2+1}dt = \int_0^1\frac{t}{t^2+1}dt - \int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt$$
$$= \Big[\frac{1}{2}\log(t^2+1)\Big]_0^1 - \arctan(1) = \frac{\log 2}{2} - \frac{\pi}{4},$$

där log är den naturliga logaritmen. $\square$

Uppgift 4. Variabelbytet $t = 4x$ ger att

$$I = \int_{\pi/5}^{7\pi/10}\sin^5(4x)dx = \frac{1}{4}\int_{4\pi/5}^{14\pi/5}\sin^5(t)dt.$$

Observera att integrationsintervallet i den senare integralen har längd 2π. Periodicitet för sinusfunktionen ger att

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5(t)dx = 0$$

eftersom sinusfunktionen är udda. $\square$

Uppgift 5. Begynnelseproblemet har lösning

$$y(x) = (x - 1 + 2e^{-x})e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Uppgift 6. Observera först att

$$f(0) = \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$$

eftersom integranden är jämn. Derivering med användande av kedjeregel och huvudsats ger att

$$f'(x) = 2\cos(2x)e^{-\sin^2(2x)}$$

för $x \in \mathbb{R}$. Härav följer att $f'(0) = 2$. Sökt tangent är linjen $y = \sqrt{\pi}/2 + 2x$. $\square$

Uppgift 7. Beteckna med $\Pi(n)$ integralen

$$\Pi(n) = \int_{0}^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Integralen är konvergent pga exponentiellt avtagande. Observera att

$$\Pi(0) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} dt = 1.$$

En partiell integration ger att

$$\Pi(n) = [t^n(-e^{-t})]_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} ((-e^{-t}))nt^{n-1} dt = n\Pi(n-1)$$

for $n = 1, 2, \ldots$. Induktion ger nu att $\Pi(n) = n!$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. $\square$

Anm. Funktionen

$$\Gamma(x) = \int_{0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0,$$

kallas Gamma-funktionen. Enligt ovan gäller att $\Gamma(n+1) = n!$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Gamma-funktionen är den gängse generaliseringen av fakultet till ej nödvändigtvis naturliga tal och uppträder i en mängd olika sammanhang.