LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Lösningsförslag:

1. Taylorutveckling kring $x = 0$ av e^{2x}, $\ln(1+x)$ och $\cos(2x)$ visar att uttrycken i både nämnare och täljare domineras av x^2 för x nära 0. Vi har att

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + O(x^3) = 1 + 2x + 2x^2 + O(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3),$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + O(x^4) = 1 - 2x^2 + O(x^4)$$

vilket ger:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2\ln(1+x) - 1}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2x + 2x^2 + O(x^3) - 2(x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)) - 1}{1 - (1 - 2x^2 + O(x^4))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + O(x^3)}{2x^2 + O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{3 + O(x)}{2 + O(x^2)} = \frac{3}{2}$$

Svar: $\frac{3}{2}$

2. Den allmänna lösningen y till den givna differentialekvationen ges av $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0$ och y_p är en partikulär lösning till den ursprungliga ekvationen.
Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 5 = 0$ associerad till den homogena ekvationen har rötterna $x_1 = 2 + i$ och $r_2 = 2 - i$. Den allmänna lösningen y_h ges då av

$$y_h(x) = Ae^{(2+ix)} + Be^{(2-i)x} = e^{2x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)),$$

där A, B, C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.
För att hitta en partikulär lösning till den ursprungliga ekvationen ansätter vi $y_p(x) = z(x)e^x$. Vi har att $y_p'(x) = (z'(x) + z(x))e^x$ och $y_p''(x) = (z''(x) + 2z'(x) + z(x))e^x$. Insättning i ekvationen och förkortning med e^x ger

$$z'' + 2z' + z - 4(z' + z) + 5z = 2x^2 \Leftrightarrow z'' - 2z' + 2z = 2x^2.$$

Eftersom funktionen i högerledet är ett polynom av grad 2 ansätter vi z som ett godtyckligt polynom av samma grad, dvs $z = ax^2 + bx + c$. Detta ger $z' = 2ax + b$ och $z'' = 2a$. Insättning i ekvationen $z'' - 2z' + 2z = 2x^2$ ger efter identifiering av koefficienter $a = 1$, $b = 2$ och $c = 1$. Vi har alltså att $z(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ och $y_p(x) = (x+1)^2 e^x$

Svar: $y(x) = e^{2x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + (x+1)^2 e^x$.

Var god vänd!

3. De givna funktionskurvorna tangerar varandra då $x = 0$ om $f(0) = g(0)$ och $f'(0) = g'(0)$. Det är lätt att verifiera att $f(0) = g(0) = 1$. Vi har att

$$f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x + a = x\cos x + a$$

samt

$$g'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$$

Detta ger att $f'(0) = a$, $g'(0) = 1$, vilket innebär att funktionskurvorna tangerar varandra om $a = 1$.

Svar: $a = 1$

4. Vi börjar med att notera att $D_f = \mathbb{R}$ och att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Funktionen har inga vertikala eller horisontella asymptoter, vi söker efter sneda asymptoter.

En linje $y = kx+m$ är en sned asymptot då $x \to \pm\infty$ till $y = f(x)$ om $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ samt $m = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx$. Vi har att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x}{x(x^2+1)} - 2\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1 - 1/x^2)}{x^3(1 + 1/x^2)} - 2\frac{\arctan x}{x} = 1$$

samt

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x}{x^2+1} - 2\arctan x - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x - x(x^2+1)}{x^2+1} - 2\lim_{x\to\infty} \arctan x =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x^2(1+1/x^2)} - 2\frac{\pi}{2} = 0 - \pi = -\pi$$

vilket visar att linjen $y = x - \pi$ är en sned asymptot till funktionskurvan då $x \to \infty$. På samma sätt visas det att linjen $y = x + \pi$ är en sned asymptot till funktionskurvan då $x \to -\infty$ ($\arctan x \to -\pi/2$ då $x \to -\infty$).

(Funktionkurvans sneda asymptoter kan också fås med hjälp av polynomdivision: $\frac{x^3 - x}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1) - 2x}{x^2+1} = x - \frac{2x}{x^2+1}$ vilket visar att $f(x) - (x \mp \pi) \to 0$ då $x \to \pm\infty$.)

Vi studerar nu funktionens derivata. Vi har att

$$f'(x) = \frac{(3x^2-1)(x^2+1) - (x^3-x)2x}{(x^2+1)^2} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{3x^4 + 2x^2 - 1 - 2x^4 + 2x^2 - 2(1+x^2)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2-1)(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

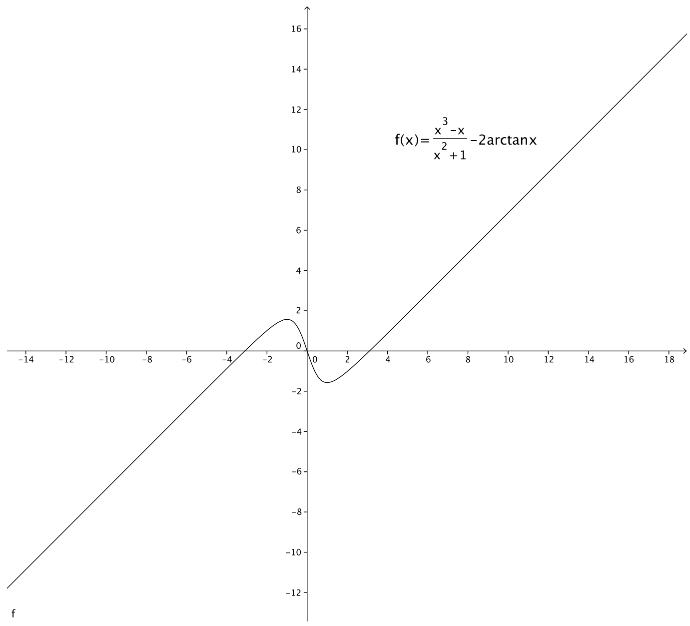
Det följer att $f'(x) = 0$ då $x = -1$ eller då $x = 1$ och teckenstudium visar att $f'(x) > 0$ då $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ samt att $f'(x) < 0$ då $x \in (-1, 1)$. Funktionen har då ett lokalt maximum för $x = -1$ ($f(-1) = -2\arctan(-1) = \pi/2$) och ett lokalt minimum för $x = 1$ ($f(1) = -2\arctan(1) = -\pi/2$) .

Vidare studerar vi funktionens andraderivata. Vi har att

$$f''(x) = \left(\frac{x^4 + 2x^2 - 3}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(4x^3 + 4x)(x^2+1)^2 - (x^4 + 2x^2 - 3)\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3+4x)(x^2+1)-4x(x^4+2x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 4\frac{(x^5+2x^3+x-x^5-2x^3+3x)}{(x^2+1)^3} = \frac{16x}{(x^2+1)^3}$$

Vi har alltså att $f''(x) = 0$ då $x = 0$, $f''(x) > 0$ då $x > 0$, $f''(x) < 0$ då $x < 0$. Funktionen är konkav i $(-\infty, 0)$, konvex i $(0, \infty)$ och har en inflexionspunkt i $x = 0$.



Figur 1: Grafen till funktionen f.

Svar: Sneda asymptoter $y = x \mp \pi$ då $x \to \pm\infty$. Funktionen är konkav i $(-\infty, 0)$, konvex i $(0, \infty)$.

5. Variabelbytet $y = \ln x$ ger

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)((\ln x)^2+1)}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{y(y^2+1)}\,dy,$$

eftersom $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$, $y = 1$ för $x = e$ samt $y \to \infty$ då $x \to \infty$. För att bestämma en primitiv funktion till den nya integranden använder vi partialbråksuppdelning:

$$\frac{1}{y(y^2+1)} = \frac{A}{y} + \frac{Bx+C}{y^2+1}.$$

Likheten ovan är uppfylld då $1 = A(y^2+1) + y(Bx+C)$ vilket efter identifiering av koefficienter ger $A = 1$, $B = -1$ och $C = 0$.
Vi har alltså att

$$\int_1^\infty \frac{1}{y(y^2+1)}\,dy = \int_1^\infty \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2+1}\right)dy = \left[\ln y - \frac{1}{2}\ln(y^2+1)\right]_1^\infty,$$

vilket ger att integralen ovant är lika med

$$\lim_{y\to\infty}(\ln y - \frac{1}{2}\ln(y^2+1)) - (\ln 1 - \frac{1}{2}\ln(1+1)) = \lim_{y\to\infty}\frac{2\ln y - \ln(y^2+1)}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 =$$

Var god vänd!

$$= \frac{1}{2} \lim_{y \to \infty} \ln\left(\frac{y^2}{y^2+1}\right) + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

(Den sista likheten följer av att $\ln\left(\frac{y^2}{y^2+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+1/y^2}\right) \to \ln 1 = 0$ då $y \to \infty$.)

Svar: $\frac{1}{2}\ln 2$

6. a) Sätt $a_k = \left(\ln \frac{2k}{k+1}\right)^k$. Det är klart att $a_k > 0$ för $k = 1, 2, \ldots$. Vi har att

$$a_k^{1/k} = \ln \frac{2k}{k+1} = \ln \frac{2}{1+1/k} \to \ln \frac{2}{1+0} = \ln 2 \text{ då } k \to \infty.$$

Eftersom $\ln 2 < 1$ kan vi dra slutsatsen att den givna serien konvergerar enligt Cauchys rotkriterium.

b) Vi har att

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \to \ln e = 1 \text{ då } k \to \infty$$

enligt känt standardgränsvärde. Serien divergerar då eftersom dess termer inte går mot 0.

c) Sätt $a_k = \tan\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k}$. Klart att $a_k > 0$ för $k = 1, 2, \ldots$. Eftersom $1/k$ är nära 0 för stora k studerar vi differensen $\tan x - \sin x$ för x nära 0 med hjälp av Maclauringutvecklingar. Vi har att

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x} = \frac{(x+O(x^3))(1-(1-\frac{x^2}{2!}+O(x^4))}{1+O(x^2)} =$$

$$= \frac{(x+O(x^3))(\frac{x^2}{2!}+O(x^4))}{1+O(x^2)} = \frac{x^3/2+O(x^5)}{1+O(x^2)}$$

då x är nära 0, enligt elementära Maclaurinutvecklingar. Detta ger att för stora k gäller

$$a_k = \tan\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k} = \frac{\frac{1}{2k^3}+O(\frac{1}{k^5})}{1+O(\frac{1}{k^2})}$$

Sätt $b_k = \frac{1}{k^3}$. Vi vet att serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar. Vi har att

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{1}{2k^3}+O(\frac{1}{k^5})}{1+O(\frac{1}{k^2})} \cdot k^3 = \frac{\frac{1}{2}+O(\frac{1}{k^2})}{1+O(\frac{1}{k^2})} \to \frac{1}{2} \text{ då } k \to \infty.$$

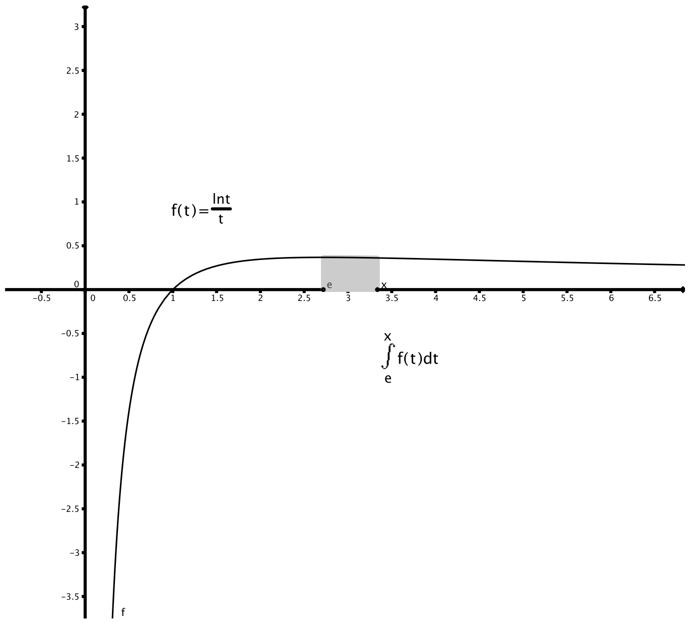
Eftersom serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar, så konvergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ enligt känt jämförelsekriterium för positiva serier.

Svar: (a) konvergent, (b) divergent, (c) konvergent.

7. **a)** Den sökta olikheten följer direkt av att funktionen $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ är (strängt) avtagande i intervallet (e, ∞). Detta följer i sin tur av att

$$f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} < 0 \text{ för } x > e.$$

$(\int_e^x f(t)\,dt = f(\xi)(x-e)$ för något ξ mellan e och x, $x \geq e$ och $f(\xi) \geq f(x)$ ty f är avtagande.)



Figur 2: Grafen till f och $\int_e^x f(t)dt$.

b) Vi undersöker först huruvida den givna följden är växande eller avtagande. Betrakta differensen $a_{n+1} - a_n$. För varje $n = 0, 1, 2, \ldots$ har vi att

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n =& f(e) + f(e+1) + \cdots + f(e+n+1) - \int_e^{e+n+1} f(x)dx - \\ & (f(e) + f(e+1) + \cdots + f(e+n) - \int_e^{e+n} f(x)dx) = \\ =& f(e+n+1) - \int_{e+n}^{e+n+1} f(x)dx \leq 0, \end{aligned}$$

vilket medför att följden är avtagande. Den sista olikheten följer omedelbart av att funktionen f är avtagande i varje intervall av typen $(e+n, e+n+1)$. (Rita gärna bild, tänk på skillnaden mellan undersumman och integralen!)
Vidare vill vi visa att följden är nedåt begränsad för att kunna dra den önskade slutsatsen. Detta följer av att $f(e) + f(e+1) + \cdots + f(e+n)$ är för varje $n =$

Var god vänd!

$0, 1, 2, \ldots$ en översumma till integralen $\displaystyle\int_e^{e+n+1} f(x)dx$. Vi har att

$$\begin{aligned} a_n =& f(e) + f(e+1) + \cdots + f(e+n) - \int_e^{e+n} f(x)dx) \geq \\ \geq& \int_e^{e+n+1} f(x)dx) - \int_e^{e+n} f(x)dx) = \int_{e+n}^{e+n+1} f(x)dx) \geq 0 \end{aligned}$$

varav slutsatsen följer.