LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Analys 1
Måndag 20 december 2010

Lösningsförslag:

1. Taylorutveckling kring $x = 0$ av $\cos x$, $\sin x$, e^x och $\arctan x$ visar att uttrycken i både nämnare och täljare domineras av x^4 för x nära 0. Vi har att

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5), \qquad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)$$

$$\sin x = x + O(x^3), \quad (\sin x)^2 = x^2 + O(x^4)$$

$$\arctan x = x + O(x^3), \quad \arctan x^2 = x^2 + O(x^6)$$

vilket ger: $\dfrac{e^x + e^{-x} + 2\cos x - 4}{(\sin x)^2 \arctan x^2} =$

$$= \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)) + (1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)) + 2(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)) - 4}{(x^2 + O(x^4))(x^2 + O(x^6))}$$

$$= \frac{\frac{4x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^6)}{x^4 + \mathcal{O}(x^6)} = \frac{x^4(\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2))}{x^4(1 + \mathcal{O}(x^2))} \to \frac{1}{6} \text{ då } x \to 0.$$

Svar: $\frac{1}{6}$

2. Den givna olikheten är ekvivalent med

$$\ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} > 0, x > 1$$

Sätt $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$. Det gäller att visa att denna funktion är strikt positiv i intervallet $(1, \infty)$. Observera att funktionen är väldefinierad i $(0, \infty)$ och att $f(1) = 0$. Vi har att

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2\frac{x + 1 - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4x}{x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$$

Eftersom $f'(x) > 0$ för alla $x \in (1, \infty)$ följer att f är strängt växande i detta intervall. Detta innebär att $f(x) > f(1)$ för alla $x > 1$, vilket skulle bevisas.

Var god vänd!

3. En primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)}, x > 0$ är

$$F(x) = \ln(x) - \ln(x+1) = \ln \frac{x}{x+1}.$$

En integrerande faktor till den givna ekvationen ges då av

$$e^{F(x)} = e^{\ln \frac{x}{x+1}} = \frac{x}{x+1}.$$

Efter multiplikation med den integrerande faktorn kan ekvationen skrivas som

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}y(x)\right) = \frac{1}{x+1} \text{ vilket ger } \frac{x}{x+1}y(x) = \ln(x+1) + C.$$

Den allmänna lösningen till den givna ekvationen fås då som

$$y(x) = \frac{x+1}{x}(\ln(x+1) + C).$$

Svar: $y(x) = \dfrac{x+1}{x}(\ln(x+1) + C)$.

4. Vi börjar med att konstatera att $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Eftersom $|x-1| = x-1$ för $x \geq 1$ och $|x-1| = -(x-1)$ för $x < 1$ har vi att

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x-1} \text{ om } x > 1 \\ \\ -\frac{x^2+3}{x-1} \text{ om } x < 1 \end{cases}.$$

Vi har att

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

samt

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} -\frac{x^2+3}{x-1} = -\frac{4}{0^-} = +\infty.$$

Linjen $x = 1$ är en lodrät asymptot till $y = f(x)$.
Vi noterar också att $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$. Funktionen har inga horisontella asymptoter, vi söker efter sneda asymptoter. En linje $y = kx + m$ är en sned asymptot då $x \to \pm\infty$ till $y = f(x)$ om $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ samt $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - kx$. Vi har att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3}{x(x-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2(1+3/x^2)}{x^2(1-1/x)} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty}(f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3}{x-1} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3-x^2+x}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(3/x+1)}{x(1-1/x)} = 1,$$

vilket visar att linjen $y = x+1$ är en sned asymptot till funktionskurvan då $x \to \infty$. På samma sätt visas det att linjen $y = -x-1$ är en sned asymptot till funktionskurvan då $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{x^2+3}{x(x-1)} = -\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2(1+3/x^2)}{x^2(1-1/x)} = -\frac{1+0}{1-0} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-1)x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x^2+3}{x-1}+x = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x^2+3-x^2+x}{x-1} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x(3/x+1)}{x(1-1/x)} = -1.$$

(Funktionens sneda asymptoter kan också fås med hjälp av polynomdivision:
$f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1} = x+1-\dfrac{4}{x-1}$ för $x>1$ samt $f(x) = -x-1-\dfrac{4}{x-1}$ för $x<1$.)

Vi studerar nu funktionens derivata. Vi har att

$$\left(\frac{x^2+3}{x-1}\right)' = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2},$$

vilket ger:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2} & \text{om } x>1 \\ -\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2} & \text{om } x<1 \end{cases}.$$

Vi får att $f'(x)=0$ om $x=-1$ eller om $x=3$ och teckenstudium visar att $f'(x)>0$ för $x\in(-\infty,-1)\cup(1,3)$ samt $f'(x)>0$ för $x\in(-1,1)\cup(3,\infty)$. Funktionen har två lokala minimipunkter i $x=-1$ och $x=3$ med $f(-1)=2$, $f(3)=6$.
Vidare studerar vi funktionens andraderivata. Vi har att

$$\left(\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x^2-2x-3)(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2-4x+2-(2x^2-4x-6)}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}$$

vilket ger

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{8}{(x-1)^3} & \text{om } x>1 \\ -\frac{8}{(x-1)^3} & \text{om } x<1 \end{cases},$$

dvs. $f''(x)>0$ för alla $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Funktionen f är konvex i hela sin definitionsmängd.

Svar: Lodrät asymptot $x=1$, sneda asymptoter $y=\pm(x-1)$ då $x\to\pm\infty$. Funktionen är konvex i hela sin definitionsmängd $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$.

5. **a)** Sätt $a_k = \left(\dfrac{k+2}{2k+1}\right)^k$. Klart att $a_k>0$ för $k=1,2,\ldots$. Vi har att

$$a_k^{1/k} = \frac{k+2}{2k+1} = \frac{k(1+2/k)}{k(2+1/k)} = \frac{(1+2/k)}{(2+1/k)} \to \frac{1}{2} \text{ då } k\to\infty.$$

Enligt Cauchys rotkriterium kan vi dra slutsatsen att den givna serien konvergerar.

b) Vi har att

$$\frac{\ln k+2}{1+\ln k^2} = \frac{\ln k+2}{1+2\ln k} = \frac{\ln k(1+2/\ln k)}{\ln k(1/\ln k+2)} = \frac{(1+2/\ln k)}{(1/\ln k+2)} \to \frac{1}{2} \text{ då } k\to\infty.$$

Serien divergerar eftersom dess termer inte går mot 0.

Var god vänd!

c) Sätt $a_k = \sqrt{k}\sin\dfrac{1}{k}$. Klart att $a_k > 0$ för $k = 1, 2, \ldots$. För stora k är $1/k$ nära 0 och $\sin(1/k) = 1/k + \mathcal{O}(1/k^3)$. Sätt $b_k = \sqrt{k}\cdot\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Vi har att

$$\frac{a_k}{b_k} = \sqrt{k}\sin\frac{1}{k}\cdot\sqrt{k} = k\cdot\sin\frac{1}{k} = k(\frac{1}{k} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^3})) = 1 + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2}) \to 1 \text{ då } k \to \infty.$$

Eftersom serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergerar, detsamma gäller för serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ enligt känt jämförelsekriterium för positiva serier.

Svar: (a) konvergent, (b) divergent, (c) divergent.

6. **a)** Vi börjar med att observera att integranden $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}$ är väldefinierad och positiv i $(0, 1]$. Integralen är för $\alpha > 0$ generaliserad i 0. För x nära 0 har vi att $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$ (Maclaurinutveckling) vilket ger

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} = \frac{x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{x^\alpha} = \frac{1 + \mathcal{O}(x^2)}{x^{\alpha-2}}.$$

Sätt $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha-2}}$. Vi har att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 + \mathcal{O}(x^2)}{x^{\alpha-2}}\cdot\frac{x^{\alpha-2}}{1} = 1 + \mathcal{O}(x^2) \to 1 \text{ då } x \to 0.$$

Enligt känt jämförelsekriterium för generaliserade integraler av positiva funktioner gäller att $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ konvergerar om och endast om $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ konvergerar. Den sistnämnda integralen konvergerar om och endast om $\alpha - 2 < 1$, dvs. om och endast om $\alpha < 3$.

b) Vi bestämmer först en primitiv funktion till den givna integranden:

$$\int \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx = \int \frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\ln(1+x^2) - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$$= -\frac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\int\frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\arctan x + C.$$

(Här användes formeln $\int fg = Fg - \int Fg'$ för partiell integration med $f(x) = 1/x^2$ och $g(x) = \ln(1+x^2)$.) Vi har att

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\arctan x\right]_0^\infty =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\arctan x\right) - \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\ln(1+x^2)}{x} + 2\arctan x\right) = 0 + 2\frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

De sista likheterna följer av att $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{x} = \lim_{x\to 0} x + \mathcal{O}(x^3) = 0$ samt $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\arctan x = \pi/2$.

Svar: (a) $\alpha < 3$, (b) π.

7. **a)** Att följden är avtagande följer omedelbart av rekursionformeln: $a_{k+1} = a_k - a_k^2 \leq a_k$ (eftersom $a_k^2 \geq 0$ för alla $k = 0, 1, 2, \ldots$.) Vi har att $a_{k+1} = a_k(1 - a_k)$ vilket visar att $a_{k+1} \in (0, 1)$ om $a_k \in (0, 1)$. Eftersom $a_0 = a \in (0, 1)$ följer enligt induktionsprincipen att $a_k \in (0, 1)$ för alla k. Följden är således begränsad (nedåt av 0, uppåt av a.)

Enligt satsen om avtagande är följden konvergent. Sätt $A = \lim_{k\to\infty} a_k$ och låt $k \to \infty$ i rekursionformeln. Vi får att $A = A - A^2$, vilket ger $A^2 = 0$ och härmed $A = 0$.

b) Enligt rekursionformeln gäller att $a_k^2 = a_{k+1} - a_k$. Detta ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1} - a_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = \lim_{n\to\infty} (a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + \cdots + a_n - a_{n+1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} (a_0 - a_{n+1}) = a_0 + 0 = a$$

Svar: (a) 0, (b) a.