LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Analys 1
Fredag 28 maj 2010

Lösningsförslag:

1. Taylorutveckling kring $x = 0$ av $\cos x$, $\sin x$, e^x och $\arctan x$ visar att uttrycken i både nämnare och täljare domineras av x^3 för x nära 0. Vi har att

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)$$

$$\sin x = x + O(x^3), \quad \sin x^2 = x^2 + O(x^6)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$$

$$\arctan x = x + O(x^3), \quad \arctan^2 x = x^2 + O(x^4)$$

vilket ger: $\dfrac{x + \cos x + \sin x^2 - e^x}{x \arctan^2 x} =$

$$= \frac{x + (1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)) + (x^2 + \mathcal{O}(x^6)) - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4))}{x(x^2 + \mathcal{O}(x^4))}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4)}{x^3 + \mathcal{O}(x^5)} = \frac{x^3(-\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x))}{x^3(1 + \mathcal{O}(x^2))} \to -\frac{1}{6} \text{ då } x \to 0.$$

Svar: $-\frac{1}{6}$

2. Den givna olikheten är ekvivalent med

$$x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x > 0.$$

Sätt $f(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$. Vi vill alltså visa att denna funktion är positiv i intervallet $(0, \dfrac{\pi}{2})$. Observera att funktionen är väldefinierad i hela $\mathbb{R}$ och att $f(0) = 0$. Vi har att

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x = x^2 \cos x.$$

Eftersom $f'(x) > 0$ för alla $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ följer att f är strängt växande i detta intervall. Detta innebär att $f(x) > f(0)$ för alla $0 < x < \frac{\pi}{2}$, vilket skulle bevisas.

3. Den allmänna lösningen till den givna ekvationen är av formen $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, där $y_p(x)$ är en partikulär lösning och $y_h(x)$ är den allmänna lösningen till den motsvarande homogena ekvationen $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$.

Var god vänd!

För att lösa den homogena ekvationen betraktar man den karakteristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$. Denna har rötterna $r_1 = 1$ och $r_2 = 2$. Enligt lösningsformeln för en homogen lineär andra ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter får vi att

$$y_h(x) = Ae^x + Be^{2x},$$

där A och B är reella konstanter.

För att hitta en partikulärlösning till den givna ekvationen ansätter vi (med tanke på att funktionen i det högra ledet är ett andragradspolynom) $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Detta ger $y_p'(x) = 2ax + b$ samt $y_p''(x) = 2a$. Insättning i ekvationen ger:

$$2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + x + 1.$$

Identifiering av koefficienter ger nu $a = 1/2$, $b = 2$, $c = 3$ vilket medför att

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3.$$

Den allmänna lösningen till den givna ekvationen ges av

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3.$$

Svar: $y(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

4. **a)** Vi har att

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x((\ln x)^2+1)}\,dx &= \Big/ \text{variabelbyte: } t = \ln x, dt = \frac{1}{x}dx \Big/ \\ &= \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + C \\ &= \arctan(\ln x) + C\end{aligned}$$

b) Enligt uppgift (4a) och definitionen av generaliserad integral följer att:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x((\ln x)^2+1)}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x((\ln x)^2+1)}\,dx \\ &= \lim_{R\to\infty} [\arctan(\ln x)]_1^R \\ &= \lim_{R\to\infty} (\arctan(\ln R) - \arctan(\ln 1)) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Integralen är konvergent med värdet $\frac{\pi}{2}$.

Svar: (a) $\arctan(\ln x) + C$ (b) konvergent med värdet $\frac{\pi}{2}$

5. Funktionen är definierad i $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Vi har att $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ vilket innebär att linjen $x = -1$ är en lodrät asymptot till f.

Vidare har vi att $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. (Funktionen har inga vågräta asymptoter).
Eftersom

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{(x+1)^2} \to 1 \text{ då } x \to \pm\infty$$

samt att

$$f(x) - x = \frac{x^3}{(x+1)^2} - x = \frac{x^3 - x(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{-2x^2-1}{(x+1)^2} \to -2 \text{ då } x \to \pm\infty$$

följer att linjen $y = x - 2$ är en sned asymptot till funktionskurvan då $x \to \pm\infty$.
Vidare gäller att

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{3x^2(x+1) - 2x^3}{(x+1)^3} = \frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3} = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$$

Klart att $D'_f = D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Derivatans nollställen är $x = 0$ och $x = -3$ och ett teckenstudie visar att $f'(x) > 0$ för $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$ samt att $f'(x) < 0$ för $x \in (-3, -1)$. Vi drar slutsatsen att f är strängt växande $(-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$ och strängt avtagande i intervallet $(-3, -1)$ samt att f har en terrasspunkt vid $x = 0$ ($f(0) = 0$) och ett lokalt maximum vid $x = -3$ ($f(-3) = -27/4$).
Vidare studerar vi $f''(x)$, $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} f''(x) =& \frac{(3x^2+6x)(x+1)^3 - (x^3+3x^2) \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} \\ =& \frac{(3x^2+6x)(x+1) - 3(x^3+3x^2)}{(x+1)^4} = \frac{6x}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

Vi har att $f''(0) = 0$, $f''(x) > 0$ för $x \in (0, \infty)$ samt $f''(x) < 0$ för $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Funktionen är alltså konvex i $(0, \infty)$ och konkav i $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Punkten $(0, 0)$ är en inflexionspunkt.

Svar: Lokalt maximum i $(-3, -27/4)$. Terrasspunkt i $(0, 0)$. Lodrät asymptot $x = -1$, sned asymptot $y = x - 2$. Funktionen är konvex i $(0, \infty)$ och konkav i $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

6. Vi har att $a_1 = 1$, och och den givna rekursionsformeln ger:
$a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$, $a_3 = \dfrac{1}{3}$. Man kan visa att $a_n = \frac{1}{n}$ gäller för alla heltal $n \geq 1$ med hjälp av (t.ex.) induktion. Vi har redan visat att formeln gäller för $n = 1, 2, 3$. Antag nu att $a_p = \frac{1}{p}$ gäller för något heltal $p \geq 1$. Rekursionsformeln ger att

$$a_{p+1} = a_p + \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p+1},$$

vilket skulle bevisas. Det följer av induktionsprincipen att $a_n = \frac{1}{n}$ gäller för alla heltal $n \geq 1$. Denna talföljd är konvergent med $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Svar: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

7. Klart att termerna är positiva. Vi vill jämföra den givna serien med en lämplig känd serie. Vi sätter $a_k = \frac{\sqrt{k+\sqrt{k}} - \sqrt{k-\sqrt{k}}}{k^\alpha}$ och konstaterar att för stora k är den dominerande faktorn i varje uttryck i täljaren $\sqrt{k}$. Utbrytning av $\sqrt{k}$ ger:

$$a_k = \frac{\sqrt{k}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{k}}} - \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{k}}}\right)}{k^\alpha}.$$

Var god vänd!

För stora k är $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ nära 0 och Taylorutveckling ($(1+x)^{1/2}$ för x nära 0) ger:

$$\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{k}}}-\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{k}}} = \left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)-\left(1\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+O\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Detta medför att:

$$a_k = \frac{\sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)}{k^\alpha} = \frac{1+O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{k^\alpha}.$$

Sätt $b_k = \dfrac{1}{k^\alpha}$. Vi har att

$$\frac{a_k}{b_k} = 1+O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \to 1 \text{ då } k \to \infty.$$

Enligt känd jämförelsesats för positiva serier konvergerar $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ om och endast om $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar. Den sistnämnda serien konvergerar endast då $\alpha > 1$.

Svar: $\alpha > 1$.