



LUNDS
UNIVERSITET

Tentamensskrivning
MATA14 Analys 1 (13 hp)
Måndagen den 28:e maj 2012
Skrivtid: 08:00 - 13:00

Matematikcentrum
Matematik NF

Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper, skriv bara på den ena sidan, och högst en uppgift på varje papper. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall.

1. Bestäm alla extrempunkter och asymptoter till funktionen

$$f(x) = e^{-x^2/4} \sqrt{x^2 + 1}.$$

Klassificera extremalpunkterna och ange om dessa är globala (absoluta). Gör även en grov skiss där du illustrerar ditt svar.

2. Lös begynnelsvärdeproblemet:

$$\begin{cases} xy' = y + xy, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

3. Visa olikheten

$$\ln(1 + e^{-x}) > \frac{1}{e^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Bestäm integralerna

$$(a) \int_{3^2}^{2^6} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad (b) \int_1^{e^{\pi/2}} \sin(\ln x) dx.$$

5. (a) Bestäm konvergensintervallet till

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{2n}}{2n}.$$

Var noggrann med att undersöka konvergensen i eventuella ändpunkter.

(b) Bestäm värdet av $f(x)$ genom att jämföra potensserien ovan med potensserien till $1/(1-x)$.

6. (a) Låt $a > 0$. För vilka $s > 0$ konvergerar

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^s} ?$$

Bestäm värdet i de fall då integralen konvergerar.

Var god vänd!

(b) Visa (t.ex. genom att göra en figur) att

$$\int_2^{N+1} \frac{dx}{x^s} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^s} \leq \int_1^N \frac{dx}{x^s}.$$

(c) Bestäm

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} (s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$