



LUNDS
UNIVERSITET

Matematikcentrum

Matematik NF

Tentamensskrivning
Analys 1
Onsdag den 11 januari 2012
Skrivtid: 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper, skriv på bara den ena sidan och högst en uppgift på varje papper. Skriv tydligt, ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall och ge tydliga svar. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje papper. Ange gärna önskad tid för muntlig tentamen.

1. Visa olikheten att

$$e^x \geq 1 + x$$

för alla reella tal x .

2. Beräkna gränsvärdena

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}$$

och

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2},$$

där \ln betecknar den naturliga logaritmen.

3. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \sin^4(x) dx.$$

4. Beräkna integralen

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$$

5. Bestäm samtliga kontinuerliga funktioner f på den reella axeln \mathbb{R} som satisfierar integralekvationen

$$f(x) = 5 + 2 \int_0^x f(t) dt$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

Var god vänd!

6. Visa att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3^n}$$

är konvergent och beräkna dess värde.

7. Låt $a \in \mathbb{R}$ och betrakta gränsvärdet

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt - ax \right).$$

Bestäm konstanten a så att gränsvärdet L existerar ändligt eller visa att detta ej är möjligt. Beräkna även gränsvärdet L i det fall sådant tal a existerar.