



LUNDS
UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Analys 1
Måndag den 19 december 2011
Skrivtid: 14.00–19.00

Matematikcentrum
Matematik NF

Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper, skriv på bara den ena sidan och högst en uppgift på varje papper. Skriv tydligt, ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall och ge tydliga svar. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje papper. Ange gärna önskad tid för muntlig tentamen.

1. Betrakta funktionen

$$f(x) = x^2 e^{-2x}, \quad x > 0.$$

Avgör om funktionen f har största värde på den positiva halvaxeln

$$(0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < +\infty\},$$

och beräkna detta största värde om det existerar.

2. Beräkna gränsvärdena

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

och

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right).$$

3. Beräkna integralen

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx.$$

4. Beräkna integralen

$$\int_{\pi/5}^{7\pi/10} \sin^5(4x) dx.$$

5. Lös begynnelseproblemet

$$\begin{cases} y' + (x+1)y = xe^{-x^2/2}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dvs. bestäm y som funktion av x så att de båda villkoren blir uppfyllda.

Var god vänd!

6. Betrakta funktionen f definierad genom

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\sin(2x)} e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beräkna tangenten för funktionsgrafen $y = f(x)$ i punkten $x = 0$. Utan bevis får användas att

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

7. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$$

för $n = 0, 1, 2, \dots$. Motivera också varför integralen är konvergent.