Tentamensskrivning
MATA14 Analys 1
Onsdagen den 25:e maj 2011
Skrivtid: 8.00–13.00

LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Inga hjälpmedel tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar.

1. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2\ln(1+x) - 1}{1 - \cos(2x)} .$$

2. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 2x^2 e^x.$$

3. Bestäm den reella konstanten a så att funktionskurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ som ges av

$$f(x) = x\sin x + \cos x + ax, \qquad g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

tangerar varandra då $x = 0$.

4. Rita grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2+1} - 2\arctan x.$$

Ange särskilt eventuella asymptoter samt de intervall där funktionen är konvex respektive konkav.

5. Beräkna integralen:

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)((\ln x)^2 + 1)}\, dx.$$

6. Ange om följande serier konvergerar. Motivera dina svar.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln\frac{2k}{k+1}\right)^k$, **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, **c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\tan\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k}\right)$.

7. Betrakta funktionen $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ och låt för $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_n = f(e) + f(e+1) + \cdots + f(e+n) - \int_e^{e+n} f(x)\, dx.$$

a) Visa att för alla $x \geq e$ gäller olikheten $\displaystyle\int_e^x f(t)\, dt \geq (x-e)f(x)$.

b) Visa att följden $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ är konvergent.