



LUNDS
UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Analys 1
Fredag 14 januari 2011
Skrivtid: 8.00–13.00

Matematikcentrum

Matematik NF

Inga hjälpmedel tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar.

1. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1+x) - \cos x - \sin x}{(e^x - 1) \arctan x^2}.$$

2. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = xe^x.$$

3. Beräkna följande integraler:

a) $\int_1^e (x+1) \ln x \, dx,$

b) $\int_1^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \, dx.$

4. Visa att för $x \geq 0$ gäller olikheten

$$x \arctan x \geq \ln(1+x^2).$$

5. Ange om följande serier konvergerar. Motivera dina svar.

a) $\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{\ln k}{1 + \ln k^2} \right)^k,$

b) $\sum_{k=1}^\infty k \sin \frac{1}{k},$

c) $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{k}} (e^{\frac{1}{k}} - 1).$

6. a) Bestäm det reella talet $a \neq 0$ så att funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + ax + a}$$

endast har en lodrät asymptot.

- b) Skissa grafen till funktionen ovan för detta värde på a .

7. Talföljden $(a_k)_{k=0}^\infty$ ges av $a_{k+1} = \frac{a_k(a_k + 1)}{a_k^2 + 1}$, $a_0 = a$, där $0 < a < 1$.

- a) Visa att följden är konvergent och ange $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$.

b) Bestäm $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n \frac{a_k + 1}{a_k^2 + 1}.$