



LUNDS
UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Analys 1
Måndag 20 december 2010
Skrivtid: 8.00–13.00

Matematikcentrum

Matematik NF

Inga hjälpmedel tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar.

1. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2 \cos x - 4}{(\sin x)^2 \arctan x^2}.$$

2. Visa att för $x > 1$ gäller olikheten

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}.$$

3. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'(x) + \frac{1}{x(x+1)}y(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

4. Skissa grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{|x - 1|}.$$

Ange särskilt eventuella asymptoter samt var funktionen är konvex respektive konkav.

5. Ange om följande serier konvergerar. Motivera dina svar.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+2}{2k+1}\right)^k$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k + 2}{1 + \ln k^2}$, c) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \sin \frac{1}{k}$.

6. a) För vilka värden på den reella konstanten α konvergerar integralen

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx \quad ?$$

- b) Visa att integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$$

är konvergent och ange dess värde.

7. Talföljden $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ ges av $a_{k+1} = a_k - a_k^2$, $a_0 = a$, där $0 < a < 1$.

- a) Visa att följderna är avtagande och nedåt begränsad och ange $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$.

- b) Bestäm $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$.