



Matematikcentrum

Matematik NF

Inga hjälpmedel tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar.

1. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin(2x) + 2x^2}{\arctan x - x \cos x}.$$

2. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' - 4y' + 3y = xe^{2x}.$$

3. Visa att för  $x > 0$  gäller olikheten

$$\ln x \leq \frac{x}{e}.$$

4. Skissa grafen till funktionen

$$f(x) = 2 \arctan x - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Ange särskilt eventuella asymptoter.

5. Utred konvergensen av

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^4 - k^2 + 1}$ ,      b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cos(1/k)}$ ,      c)  $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x}} dx$ .

6. a) Låt  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara en deriverbar funktion. Visa att

$$\int (1 + xf'(x))e^{f(x)} dx = xe^{f(x)} + C.$$

b) Bestäm  $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} e^{\arctan x} dx$ .

7. Betrakta följderna  $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$  som definieras av

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

a) Visa att för alla heltal  $n \geq 1$  gäller att  $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$ .

b) Visa att följderna  $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$  är avtagande och begränsad.

c) Ange  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .