



LUNDS  
UNIVERSITET

Tentamensskrivning  
Analys 1  
Fredag 11 juni 2010  
Skrivtid: 8.00–13.00

Matematikcentrum

Matematik NF

Inga hjälpmedel tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar.

1. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{(\sin x)^2 \ln(1 - x) + 2 \arctan x^3}.$$

2. Visa att för  $x > 0$  gäller olikheten

$$\arctan x > \frac{x}{x^2 + 1}.$$

3. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'(x) - \frac{1}{x+1}y(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

4. Skissa grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{8x}{(x^2 + 4)} - 4 \arctan \frac{x}{2} + x.$$

Ange särskilt eventuella asymptoter.

5. Utred konvergensen av

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1}$

b)  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{k}}$

c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1/k)}{k}$

6. För vilka värden på konstanten  $a$  konvergerar integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(\arctan x)^a (x^2 + 1)} dx ?$$

Ange vid konvergens integralens värde.

7. Betrakta

$$I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

- a) Beräkna  $I_1$ ,  $I_2$  och  $I_3$ .

- b) Visa att följen  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  är avtagande och begränsad.