



LUNDS
UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Analys 1
Fredag 28 maj 2010
Skrivtid: 8.00–13.00

Matematikcentrum

Matematik NF

Inga hjälpmedel tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar.

1. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x + \sin x^2 - e^x}{x \arctan^2 x}.$$

2. Visa att för $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gäller olikheten

$$2 \sin x < x^2 \sin x + 2x \cos x.$$

3. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x^2 + x + 1.$$

4. a) Bestäm en primitiv funktion till funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x((\ln x)^2 + 1)}.$$

- b) Avgör om integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x((\ln x)^2 + 1)} dx$$

konvergerar och ange i så fall dess värde.

5. Skissa grafen till funktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}.$$

Ange särskilt eventuella asymptoter, lokala extremvärden samt var funktionen är konkav eller konvex.

6. Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ges av

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}, \quad a_1 = 1.$$

Visa att följden konvergerar och ange $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

7. För vilka reella tal α konvergerar serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k + \sqrt{k}} - \sqrt{k - \sqrt{k}}}{k^\alpha} ?$$