LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Tentamenskrivning
MATA15 Algebra 1, Delprov 1
Lördag 21 mars 2015

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Bestäm samtliga heltal a sådana att talet $13a - 100$ är delbart med 17.

Lösning: Heltalet $13a - 100$ är delbart med 17 om och endast om det finns ett heltal b sådant att $13a - 100 = 17b$. Det handlar alltså om att hitta samtliga heltal a som löser den diofantiska ekvationen

$$13a - 17b = 100. \qquad (*)$$

Vi börjar med att notera att ekvationen är lösbar eftersom $SGD(13, 17) = 1$ och $1 \big| 100$. Vi söker först en partikulär lösning till denna ekvation genom att bestämma en partikulär lösning till hjälpekvationen $13x - 17y = 1$ med hjälp av Euklides algoritm. Vi har att

$$\begin{aligned} 17 &= 13 \cdot 1 + 4, \\ 13 &= 4 \cdot 3 + 1. \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 4 \cdot 3 \\ &= 13 - (17 - 13) \cdot 3 \\ &= 13 \cdot 4 - 17 \cdot 3. \end{aligned}$$

Detta ger att $a_0 = 4$ och $b_0 = 3$ utgör en lösning till hjälpekvationen och härmed är $a_1 = 4 \cdot 100 = 400$ och $b_1 = 3 \cdot 100 = 300$ en lösning till den givna ekvationen, dvs:

$$13 \cdot 400 - 17 \cdot 300 = 100. \qquad (**)$$

Om vi subtraherar $(**)$ ledvis från ekvationen $(*)$ får vi följande samband:

$$13(a - 400) - 17(b - 300) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 13(a - 400) = 17(b - 300).$$

Eftersom $SGD(13, 17) = 1$ så måste $13 \mid (b - 300)$ (och $17 \mid (a - 400)$). Detta medför att samtliga heltalslösningar till den givna ekvationen är av formen

$$\begin{cases} a = 400 + 17n \\ b = 300 + 13n \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Svar: $a = 400 + 17n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Var god vänd!

2. Lös olikheten
$$|x^2 - |x^2 - 1| + 3| < 3.$$

Lösning: Vi har att
$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{om } x^2 - 1 \geq 0, \text{ dvs. om } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ -x^2 + 1, & \text{om } x^2 - 1 < 0, \text{ dvs. om } x \in (-1, 1) \end{cases}.$$

Detta ger upphov till följande två fall:
Fall 1: för $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ är olikheten ekvivalent med
$$|x^2 - (x^2 - 1) + 3| < 3 \iff 4 < 3$$
vilket är falskt. Olikheten är alltså inte uppfylld för några $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
Fall 2: för $x \in (-1, 1)$ är olikheten ekvivalent med
$$|x^2 - (-x^2 + 1) + 3| < 3 \iff |2x^2 + 2| < 3$$
Eftersom $2x^2 + 2 > 0$ för alla reella x så är $|2x^2 + 2| = 2x^2 + 2$ och olikheten ovan blir
$$2x^2 + 2 < 3 \iff 2x^2 - 1 < 0 \iff 2(x^2 - \frac{1}{2}) < 0 \iff (x - \frac{1}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}}) < 0$$
$$\iff x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$
Intervallet $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ är innehållet i $(-1, 1)$, så i detta fall är olikheten alltså uppfylld för alla x i detta intervall.

Svar: $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3. Visa att $z = 3i$ är en dubbelrot till ekvationen
$$z^4 - (4 + 5i)z^3 + (2 + 25i)z^2 + (42 - 39i)z - (45 + 9i) = 0$$
och lös ekvationen fullständigt.

Lösning: Vi har att $z = 3i$ är en dubbelrot till ekvationen ovan om och endast om $(z - 3i)^2$ delar det komplexa polynomet $p(z)$ i ekvationens vänsterled. Dividerar vi $p(z)$ med $(z - 3i)^2 = z^2 - 6iz - 9$ så får vi kvoten
$$q(z) = z^2 + (-4 + i)z + 5 + i.$$
Ekvationens övriga rötter satisfierar $q(z) = 0$. Vi löser denna andragradsekvation med komplexa koefficienter med känd lösningsmetod. Kvadratkomplettering ger
$$z^2 + 2\left(\frac{-4 + i}{2}\right)z + \left(\frac{-4 + i}{2}\right)^2 = \left(\frac{-4 + i}{2}\right)^2 - 5 - i$$
$$\iff \left(z + \frac{-4 + i}{2}\right)^2 = \left(-2 + \frac{i}{2}\right)^2 - 5 - i \iff \left(z - 2 + \frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{5}{4} - 3i.$$

Vi sätter nu $w = z - 2 + \dfrac{i}{2}$ och skriver $w = x + iy,\ \ x, y \in \mathbb{R}$. Ekvationen ovan blir:

$$(x+iy)^2 = -\frac{5}{4} - 3i. \ \ (*)$$

Identifiering av real- och imaginärdelar samt absolutbelopp av vänster- och högerled ger:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{5}{4} & \big(\mathrm{Re}\ w^2 = \mathrm{Re}\ (-\frac{5}{4} - 3i)\big) \\ 2xy = -3 & \big(\mathrm{Im}\ w^2 = \mathrm{Im}\ (-\frac{5}{4} - 3i)\big) \\ x^2 + y^2 = \frac{13}{4} & \big(|w^2| = |-\frac{5}{4} - 3i|\big) \end{cases}.$$

Den sista likheten följer av att $\left|-\dfrac{5}{4} - 3i\right| = \sqrt{\dfrac{25}{16} + 9} = \sqrt{\dfrac{169}{16}} = \dfrac{13}{4}$.
Ledvis addition av den första och den sista ekvationen ger

$$2x^2 = \frac{8}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Insättning i den andra ekvationen ger

$$y = -\frac{3}{2x} = -\frac{3}{2} \quad \text{då} \quad x = 1 \qquad \text{och} \quad y = \frac{3}{2} \quad \text{då} \quad x = -1$$

Vi får alltså två lösningar till ekvationen $(*)$, nämligen:

$$w_1 = 1 - \frac{3}{2}i \quad \text{och} \quad w_2 = -1 + \frac{3}{2}i.$$

Ur sambandet $w = z - 2 + \dfrac{i}{2}$, dvs $z = w + 2 - \dfrac{i}{2}$, får vi lösningarna till ekvationen $q(z) = 0$:

$$z_1 = w_1 + 2 - \frac{i}{2} = 3 - 2i \quad \text{och} \quad z_2 = w_2 + 2 - \frac{i}{2} = 1 + i.$$

Svar: Ekvationen har rötterna $1 + i$, $3 - 2i$ och dubbelroten $3i$.

4. **a)** Hur många delmängder med fyra element till mängden

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

innehåller elementet 1?

b) Visa att för varje naturligt tal n gäller att

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} = 2\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\right).$$

Lösning:
a) Mängden A har 11 element. Antalet delmängder till A med fyra element som innehåller elementet 1 är lika med antalet sätt att välja ut tre element bland de

Var god vänd!

resterande tio talen $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, utan att ta hänsyn till ordningen. Det finns alltså

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 120$$

sådana delmängder.

b) Enligt binomialsatsen gäller att

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} = (1+1)^{n+1} = 2^{n+1}$$

samt

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^{n} = 2^{n}$$

för varje naturligt tal n. Likheten blir $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, vilket är sant för alla $n \in \mathbb{N}$.

Svar: **a)** 120 delmängder

5. Låt z_1 och z_2 vara rötterna till ekvationen $z^2+2-2\sqrt{3}i = 0$ och antag att $\operatorname{Re} z_1 > \operatorname{Re} z_2$. Låt M vara mängden

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_1| \leq |z - z_2|, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

a) Skriv z_1 och z_2 på polär form.

b) Skissa mängden M i det komplexa talplanet och ange vilka värden $\arg z$ antar då $z \in M$.

Lösning:

a) Vi börjar med att lösa den givna ekvationen som kan skrivas om som:

$$z^2 = -2 + 2\sqrt{3}i.$$

Ett sätt att lösa ekvationen är att skriva både höger- och vänsterledet i polär form: Vi har att

$$|-2+2\sqrt{3}i| = 4 \quad \text{och} \quad -2+2\sqrt{3}i = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

I vänsterledet skriver vi $z = re^{i\theta}$ vilket ger $z^2 = r^2e^{2i\theta}$ och ekvationen blir

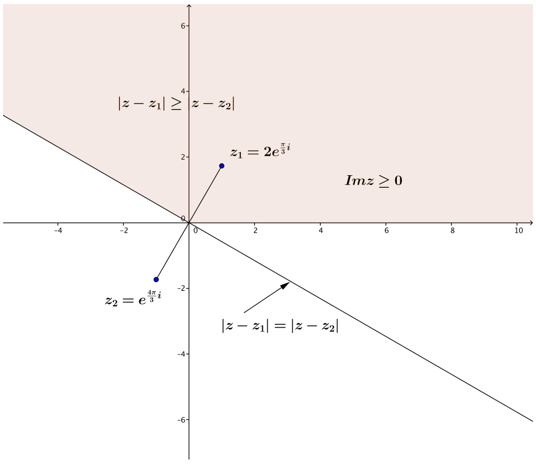
$$r^2e^{2i\theta} = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Vi får att $r^2 = 4$ och $2\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, och härmed är $r = 2$ och $\theta = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Detta tillsammans med villkoret $\operatorname{Re} z_1 > \operatorname{Re} z_2$ ger

$$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 1 + \sqrt{3}i \quad \text{och} \quad z_2 = 2e^{\frac{4\pi}{3}i} = -1 - \sqrt{3}i.$$

b) Villkoret $|z-z_1| \leq |z-z_2|$ är uppfyllt av alla komplexa tal z sådana att avståndet till z_1 är mindre än eller lika med avståndet till z_2 i det komplexa talplanet. Mängden av alla sådana tal z är det högra, slutna halvplan som begränsas av mittspunktnormalen till linjesegmentet mellan z_1 och z_2 (dvs linjen linjen $|z - z_1| = |z - z_2|$).

Mängden M är snittet mellan detta halvplan och det slutna övre halvplanet $\operatorname{Im} z \geq 0$. För samtliga punkter z på mittpunktsnormalen gäller att $\arg z = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{6}$. De värden som $\arg z$ antar då $z \in M$ ligger i intervallet $[0, \dfrac{5\pi}{6}]$.



Figur 1: Mängden M

Svar: **a)** $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $z_2 = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$ **b)** $\arg z \in [0, \dfrac{5\pi}{6}]$

6. Betrakta talföljderna a_n och b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, som ges av

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n + 3}{a_n + 3} \qquad \text{och} \qquad b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}.$$

a) Visa att följden b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, är geometrisk.
b) Härled en sluten formel för följden a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Lösning:

a) Följden b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, är geometrisk om kvoten $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ är konstant för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Vi har att

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}}{\frac{a_n-3}{a_n+1}} = \frac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 1} \cdot \frac{a_n + 1}{a_n - 3} = \frac{\frac{5a_n+3}{a_n+3} - 3}{\frac{5a_n+3}{a_n+3} + 1} \cdot \frac{a_n + 1}{a_n - 3}$$

$$= \frac{5a_n + 3 - 3(a_n + 3)}{5a_n + 3 + a_n + 3} \cdot \frac{a_n + 1}{a_n - 3} = \frac{(2a_n - 6)(a_n + 1)}{(6a_n + 6)(a_n - 3)} = \frac{(2(a_n - 3))(a_n + 1)}{(6(a_n + 1)(a_n - 3)} = \frac{1}{3},$$

vilket visar att följden är geometrisk med kvoten $\frac{1}{3}$. Detta tillsammans med $b_1 = \frac{a_1-3}{a_1+1} = -\frac{2}{2} = -1$ ger att

$$b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot b_1 = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3^{n-1}}.$$

b) För att få en sluten formel för följden a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ kan vi utnyttja det vi vet om följden b_n. Om vi kombinerar den slutna formeln för b_n men den givna formeln för b_n får vi att

$$-\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \iff -(a_n + 1) = 3^{n-1}(a_n - 3) \iff -a_n - 1 = 3^{n-1}a_n - 3^n$$

$$\iff a_n(3^{n-1} + 1) = 3^n - 1 \iff a_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1} + 1}.$$

Svar: **a)** $b_n = -\dfrac{1}{3^{n-1}}$ **b)** $a_n = \dfrac{3^n - 1}{3^{n-1} + 1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.