LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Algebra 1, del 2
Måndag, 8 december 2014

Lösningar

1. De tre vektorerna utgör en bas för rummet om och endast om de är lineärt oberoende. För att avgöra detta löser vi ekvationen $x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=0$ som är ekvivalent med ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+2x_3=0 \\ x_1+2x_2+\ \ x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_2-\ \ x_3=0 \\ x_2-2x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+\ 2x_3=0 \\ x_2-\ \ x_3=0 \\ -x_3=0 \end{cases}.$$

Vi ser att den enda lösningen till systemet ges av $x_1=x_2=x_3=0$ vilket innebär att vektorerna är lineärt oberoende. Koordinaterna (x_1,x_2,x_3) för vektorn u med avseende på basen e_1,e_2,e_3 ges av $x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3=u$ vilket är ekvivalent med

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+2x_3=2 \\ x_1+2x_2+\ \ x_3=3 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=2 \\ x_2-\ \ x_3=1 \\ x_2-2x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+\ 2x_3=\ \ 2 \\ x_2-\ \ x_3=\ \ 1 \\ -x_3=-1 \end{cases}$$

av vilket det följer att $(x_1,x_2,x_3)=(-2,2,1)$.

Svar: Koordinaterna är $(-2,2,1)$.

2. Att punkten R ligger på båda linjerna innebär att $R=(3,4,3)+s(1,1,1)=(4,8,10)+t(1,2,3)$ för några reella tal s och t. Ekvationen $(3,4,3)+s(1,1,1)=(4,8,10)+t(1,2,3)$ är ekvivalent med systemet

$$\begin{cases} s-\ \ t=1 \\ s-2t=4 \\ s-3t=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s-\ \ \ t=1 \\ -t=3 \\ -2t=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s-\ \ t=1 \\ -t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=-2 \\ t=-3 \end{cases}.$$

Sålunda ges koordinaterna för skärningspunkten R av $(3,4,3)-2(1,1,1)=(1,2,1)$. Vi har att $u=\overrightarrow{RP}=2(1,1,1)$ och $v=\overrightarrow{RQ}=3(1,2,3)$ vilket ger

$$u\times v=6((1,1,1)\times(1,2,3))=6(1\cdot 3-1\cdot 2, 1\cdot 1-1\cdot 3, 1\cdot 2-1\cdot 1)=6(1,-2,1).$$

Arean av triangeln ges av

$$\frac{|u\times v|}{2}=\frac{6\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}{2}=3\sqrt{6}.$$

Svar: $R=(1,2,1)$ och arean är $3\sqrt{6}$.

Var god vänd!

3. Matrisen A är inverterbar om och endast om ekvationssystemet $AX = Y$ har entydig lösning för varje högerled Y. Med $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ och $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ har vi att

$$AX = Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_2 - 4x_3 = -y_1 + y_2 \\ -x_2 - 2x_3 = -y_1 + y_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 - 2y_3 \\ -x_2 - 2x_3 = -y_1 + y_3 \end{cases}.$$

Vi observerar att systemet har entydig lösning för varje Y och härmed är matrisen A inverterbar. Systemet har följande entydiga lösning

$$\begin{aligned} x_2 &= y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_3 &= \frac{-x_2 + y_1 - y_3}{2} = \frac{-y_2 + y_3}{2} \\ x_1 &= y_1 - 2x_2 - 3x_3 = \frac{-2y_1 - y_2 + 5y_3}{2} \end{aligned}$$

och inversen ges av

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svar: Inversen är som ovan.

4. Vi kan välja vektorn $u = (0, -3, 1)$ från punkten $(1, 1, 1)$ till punkten $(1, -2, 2)$ samt riktningsvektorn $v = (1, 2, -1)$ för den givna linjen som basvektorer för planet. Vi har att $u \times v = (1, 1, 3)$ är en normalvektor till planet. Eftersom $(1, 1, 1)$ är en punkt i planet, får vi att planets ekvation ges av $x - 1 + y - 1 + 3(z - 1) = 0$. Denna ekvation kan också skrivas som $x + y + 3z - 5 = 0$.

Linjen genom punkten $P = (5, 2, 3)$ parallell med normalvektorn $(1, 1, 3)$ har ekvationen $(x, y, z) = (5, 2, 3) + t(1, 1, 3)$. Skärningspunkten Q mellan planet och linjen är den punkt i planet som ligger närmast punkten P. Parametern t som motsvarar punkten Q uppfyller ekvationen

$$5 + t + 2 + t + 3(3 + 3t) - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 11t = -11 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1.$$

Härmed gäller att $Q = (4, 1, 0)$ och det minsta avståndet är $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(1, 1, 3)| = \sqrt{11}$.

Svar: Ekvationen är $x + y + 3z - 5 = 0$, det minsta avståndet ges av $\sqrt{11}$, och koordinaterna för den närmaste punkten är $(4, 1, 0)$.

5. Sidan PQR ligger i planet $x + 4y + z = 1$, och en normalvektor till planet är $u = (1, 4, 1)$. Vi har att $v = \overrightarrow{PS} = (4, 1, 1)$ är en riktningsvektor för sidan PS. Vinkeln θ mellan de två vektorerna ges av

$$\cos\theta = \frac{(u|v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{9}{\sqrt{18}\sqrt{18}} = \frac{1}{2}$$

och härmed gäller att $\theta = \pi/3$. Vinkeln mellan sidan PQR och kanten PS är lika med $\pi/2 - \theta = \pi/6$. En normalvektor till planet som innehåller sidan PQS är

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = (-6, 12, 12) = 6(-1, 2, 2) = 6w$$

där $w = (-1, 2, 2)$. Detta medför att vinkeln ϕ mellan sidorna PQR och PQS är

$$\cos\phi = \frac{(u|w)}{|u| \cdot |w|} = \frac{9}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

och $\phi = \pi/4$.

Tetraedern spänns upp av vektorerna

$$\overrightarrow{PQ} = (4, -2, 4), \quad \overrightarrow{PR} = (7, -2, 1), \quad \overrightarrow{PS} = (4, 1, 1).$$

Deras determinant ges av

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 4 & 7 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 4 \cdot (-2) \cdot 1 + 7 \cdot 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 7 \cdot (-2) \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 4 \\ &= 54\end{aligned}$$

och tetraederns volym ges av $54/6 = 9$.

Svar: Vinkeln mellan sidan PQR och kanten PS är $\pi/6$. Vinkeln mellan sidorna PQR och PQS är $\pi/4$. Volymen är 9.

6. De två givna planen har normalvektorer $u = (2, 1, 2)$ respektive $v = (23, 19, 8)$ vilkas vektorprodukt är $u \times v = (-30, 30, 15) = -15(2, -2, -1)$. Detta medför att $w = (2, -2, -1)$ är parallell med båda planen. Planet $2(x + 5) - 2(y + 5) - (z + 5) = 0$ är ortogonalt mot båda planen och innehåller sfärens medelpunkt $(-5, -5, -5)$. Efter förenkling får vi att ekvationen för detta plan är $2x - 2y - z = 5$.

De punkter som vi söker ligger på skärningslinjen mellan detta plan och planet $2x + y + 2z = 2$. En ekvation på parameterform för denna skärningslinje får vi från systemet

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 5 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

vilket ger $(x, y, z) = (3/2, -1, 0) + t(1, 2, -2)$. De två sökta punkterna fås som skärningspunkter mellan linjen ovan och den givna sfären och motsvarar de värden på parametern t som uppfyller

$$\left(\frac{3}{2} + t + 5\right)^2 + (-1 + 2t + 5)^2 + (-2t + 5)^2 = 225.$$

Efter förenkling får vi den ekvivalenta ekvationen

$$t^2 + t = \frac{63}{4}$$

som har rötterna $t = -9/2$ och $t = 7/2$. För dessa värden på parametern t får vi punkterna $(5, 6, -7)$ and $(-3, -10, 9)$. För att avgöra vilken av dessa punkter ligger

Var god vänd!

närmast respektive längst ifrån planet $M : 23x + 19y + 8z - 386 = 0$, jämför vi avståndet från punkterna till planet. Vi har att

$$|23 \cdot 5 + 19 \cdot 6 + 8 \cdot (-7) - 386| = 213, \quad |23 \cdot (-3) + 19 \cdot (-10) + 8 \cdot 9 - 386| = 573,$$

vilket visar att avståndet från punkten $(5, 6, -7)$ är mindre än avståndet från punkten $(-3, -10, 9)$ till M.

Svar: De punkter på skärningscirkeln som ligger närmast respektive längst ifrån M är $(5, 6, -7)$ respektive $(-3, -10, 9)$.