Tentamenskrivning
MATA15 Algebra: delprov 1, 6hp
Lördagen den 3 november 2014

LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. **a)** Lös den diofantiska ekvationen

$$29x + 11y = 200.$$

b) Ange alla lösningar (x, y) sådana att x och y är positiva heltal.

Lösning:

a) Vi börjar med att notera att den givna diofantiska ekvationen är lösbar eftersom $SGD(29, 11) = 1$ och $1 \big| 200$. Vi söker en partikulär lösning till denna ekvation genom att först bestämma en partikulär lösning till ekvationen $29x + 11y = 1$ med hjälp av Euklides algoritm. Vi har att

$$\begin{aligned} 29 &= 11 \cdot 2 + 7, \\ 11 &= 7 \cdot 1 + 4, \\ 7 &= 4 \cdot 1 + 3, \\ 4 &= 3 \cdot 1 + 1. \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \\ &= 4 - (7 - 4) = 4 \cdot 2 - 7 \\ &= (11 - 7) \cdot 2 - 7 = 11 \cdot 2 - 7 \cdot 3 \\ &= 11 \cdot 2 - (29 - 11 \cdot 2) \cdot 3 = 11 \cdot 8 - 29 \cdot 3 = 29 \cdot (-3) + 11 \cdot 8 \end{aligned}$$

Detta ger att $x_0 = -3$ och $y_0 = 8$ utgör en lösning till hjälpekvationen och härmed är $x_1 = -3 \cdot 200 = -600$ och $y_1 = 8 \cdot 200 = 1600$ en lösning till den givna ekvationen, dvs:

$$29 \cdot (-600) + 11 \cdot 1600 = 200. \qquad (*)$$

Om vi subtraherar $(*)$ ledvis från den givna ekvationen får vi följande samband:

$$29(x + 600) + 11(y - 1600) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 29(x + 600) = -11(y - 1600).$$

Eftersom $SGD(29, 11) = 1$ så måste $29 \mid (y - 1600)$ och $11 \mid (x + 600)$. Detta medför att samtliga heltalslösningar till den givna ekvationen är av formen

$$\begin{cases} x = -600 + 11n \\ y = 1600 - 29n \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

b) Villkoren $x > 0$ och $y > 0$ i ekvationen ovan medför att

$$n > \frac{600}{11} = 54 + \frac{6}{11} \qquad \text{och} \qquad n < \frac{1600}{29} = 55 + \frac{5}{29}.$$

Det enda heltalet n som satisfierar båda dessa villkor är $n = 55$. För detta värde på n får vi $x = 5$, $y = 5$.

Var god vänd!

2. Ange de komplexa rötterna till ekvationen

$$z^3 = \frac{(1+i)^5}{\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3(1-i)^2}$$

på formen $re^{i\theta}$ och skissa dem som punkter i det komplexa talplanet.

Lösning: Vi börjar med att skriva det komplexa talet i högerledet på polär form. Dess absolutbelopp ges av

$$\frac{|1+i|^5}{\left|1+\sqrt{3}\,i\right|^3|1-i|^2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^5}{2^3\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2^{-3/2}$$

medan dess argument är lika med

$$5\arg(1+i) - 3\arg\left(1+\sqrt{3}\,i\right) - 2\arg(1-i) = 5\cdot\frac{\pi}{4} - 3\cdot\frac{\pi}{3} - 2\cdot\frac{(-\pi)}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

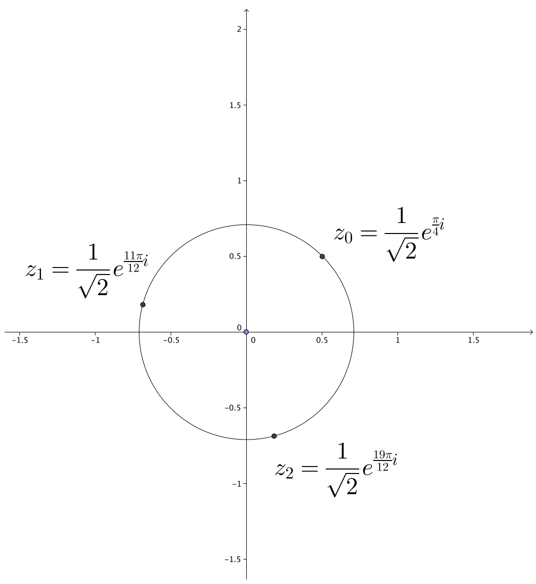
Ekvationens högerled kan alltså skrivas som $2^{-3/2}e^{3\pi i/4}$ och i vänsterledet sätter vi $z = re^{i\theta}$ vilket medför att $z^3 = r^3e^{3i\theta}$. Ekvationen blir:

$$r^3e^{3i\theta} = 2^{-3/2}e^{3\pi i/4},$$

vilket ger att $r = 2^{-1/2}$ och $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Rötterna till ekvationen ges av

$$z_k = 2^{-1/2}e^{(\pi/4+2\pi k/3)i}, \quad k = 0,1,2.$$

Punkterna z_k ligger på en cirkel med centrum i punkten origo och radie $1/\sqrt{2}$ i det komplexa talplanet, jämnt fördelade på vinkelavståndet $\frac{2\pi}{3}$ från $\frac{\pi}{4}$, se figuren nedan.



Figur 1: ekvationens rötter

3. **a)** Bestäm den konstanta termen i utvecklingen av

$$\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9.$$

b) Hur många olika bokstavskombinationer kan man bilda med bokstäverna i ordet

TALLAHASSEE?

Lösning:
a) Enligt binomialsatsen har vi att

$$\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} \left(x^2\right)^{9-k} \left(-\frac{1}{2x}\right)^k = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (-1)^k 2^{-k} x^{18-3k}.$$

Den konstanta termen i utvecklingen fås för k sådant att $18 - 3k = 0$, dvs för $k = 6$:

$$\binom{9}{6}(-1)^6 2^{-6} = \binom{9}{3} 2^{-6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^6} = \frac{21}{16}.$$

b) Ordet TALLAHASSEE innehåller 11 bokstäver. Det finns 11! olika permutationer av de 11 bokstäverna om vi betraktar dem som olika, dvs om skiljer på de 3 A:na, 2 E:na, 2 L:en och 2 S:en i ordet. Om man sedan betraktar bokstäverna som lika så har varje distinkt permutation räknats 3!2!2!2! gånger bland de 11! permutationerna. Antalet olika bokstavskombinationer ges alltså av

$$\frac{11!}{3!2!2!2!} = 831600.$$

4. Ekvationen

$$z^3 - (1 + 3i)z^2 - (6 - 3i)z + 8 + 6i = 0$$

har en reell rot. Lös ekvationen fullständigt.

Lösning:
Om $z = a$, $a \in \mathbb{R}$, är en reell rot till ekvationen ovan så gäller att

$$a^3 - (1 + 3i)a^2 - (6 - 3i)a + 8 + 6i = 0.$$

För $a \in \mathbb{R}$ är likheten ovan uppfylld om och endast om både realdelen och imaginärdelen av vänsterledet är lika med 0, vilket ger

$$a^3 - a^2 - 6a + 8 = 0 \quad \text{och} \quad -3a^2 + 3a + 6 = 0.$$

Den andra ekvationen har rötterna $a = -1$ och $a = 2$. Insättning i den första ekvationen visar att endast $a = 2$ satisfierar båda ekvationerna. Således är $z = 2$ den enda reella roten till den ursprungliga ekvationen. Enligt faktorsatsen följer att $z - 2$ delar det komplexa polynomet $p(z)$ i ekvationens vänsterled. Dividerar vi $p(z)$ med $z - 2$ så får vi kvoten

$$q(z) = z^2 + (1 - 3i)z - 4 - 3i.$$

Ekvationens övriga rötter satisfierar $q(z) = 0$. Vi löser denna andragradsekvation med komplexa koefficienter med känd lösningsmetod. Kvadratkomplettering ger

$$z^2 + 2\left(\frac{1 - 3i}{2}\right)z + \left(\frac{1 - 3i}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 - 3i}{2}\right)^2 + 4 + 3i$$

Var god vänd!

$$\iff \left(z+\frac{1-3i}{2}\right)^2 = \frac{-8-6i}{4}+4+3i \iff \left(z+\frac{1-3i}{2}\right)^2 = 2+\frac{3i}{2}.$$

Vi sätter nu $w = z + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ och skriver $w = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$. Ekvationen ovan blir:

$$(x+iy)^2 = 2+\frac{3i}{2}. \quad (*)$$

Identifiering av real- och imaginärdelar samt absolutbelopp av vänster- och högerled ger:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 & \left(\text{Re } w^2 = \text{Re } (2+\frac{3i}{2})\right) \\ 2xy = \frac{3}{2} & \left(\text{Im } w^2 = \text{Im } (2+\frac{3i}{2})\right) \\ x^2+y^2 = \frac{5}{2} & \left(|w^2| = |2+\frac{3i}{2}|\right) \end{cases}.$$

Den sista likheten följer av att $\left|2+\frac{3i}{2}\right| = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$.
Ledvis addition av den första och den sista ekvationen ger

$$2x^2 = \frac{9}{2} \quad \iff \quad x^2 = \frac{9}{4} \quad \iff \quad x = \pm\frac{3}{2}.$$

Insättning i den andra ekvationen ger

$$y = \frac{3}{4x} = \pm\frac{1}{2} \quad \text{då} \quad x = \pm\frac{3}{2}$$

Vi får två lösningar till ekvationen $(*)$, nämligen:

$$w_1 = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i \quad \text{och} \quad w_2 = -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Ur sambandet $w = z + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, dvs $z = w - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, får vi lösningarna till ekvationen $q(z) = 0$:

$$z_1 = w_1 - \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i = 1+2i \quad \text{och} \quad z_2 = w_2 - \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i = -2+i.$$

5. Visa med induktion att olikheten

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \geq \frac{n(n+1)^2}{4}$$

gäller för alla positiva heltal n.

Lösning: Låt P_n beteckna olikheten ovan för $n = 1, 2, 3, \ldots$. För $n = 1$ är båda sidorna i olikheten lika med 1, så påståendet P_1 är sant.
Antag nu att P_p är sant för något naturligt tal $p \geq 1$ dvs.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p} k^2}_{VL_p} \geq \underbrace{\frac{p(p+1)^2}{4}}_{HL_p} \ (IA).$$

Vi visar att i så fall gäller att P_{p+1} är sant, dvs.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p+1} k^2}_{VL_{p+1}} = \underbrace{\frac{(p+1)(p+2)^2}{4}}_{HL_{p+1}} .$$

Vi har att

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= VL_p + (p+1)^2 \overset{IA}{\geq} HL_p + (p+1)^2 \\ &= \frac{p(p+1)^2}{4} + (p+1)^2 \\ &= \frac{(p+1)^2(p+4)}{4}. \end{aligned}$$

Det räcker alltså att visa att

$$(p+1)^2(p+4) \geq (p+1)(p+2)^2, \quad p \geq 1,$$

vilket är ekvivalent med

$$(p+1)(p+4) \geq (p+2)^2, \quad p \geq 1.$$

Den sista olikheten följer från

$$(p+4)(p+1) - (p+2)^2 = p^2 + 5p + 4 - p^2 - 4p - 4 = p \geq 1.$$

Sålunda är P_{p+1} sant om P_p är sant. Detta tillsammans med det faktum att P_1 är sant medför enligt induktionsprincipen att P_n är sant för alla naturliga tal $n \geq 1$.

6. **a)** Låt a och b vara positiva heltal och antag att b är udda. Visa t. ex. genom att använda formeln för geometriska summor att $a^b + 1$ är delbart med $a + 1$.

b) Låt k vara ett positivt heltal. Visa att om $2^k + 1$ är ett primtal, så är $k = 2^n$ för något naturligt tal n.

Lösning:

a) Låt b vara ett udda naturligt tal och betrakta följande geometriska summa med konstant kvot $-a \neq 1$ och b stycken termer:

$$1 + (-a) + (-a)^2 + \cdots + (-1)^{b-1} = \frac{(-a)^b - 1}{(-a) - 1}.$$

Om b är udda så gäller att $(-a)^b = -a^b$ och vi kan skriva

$$\frac{(-a)^b - 1}{(-a) - 1} = \frac{-a^b - 1}{-a - 1} = \frac{a^b + 1}{a + 1}$$

och härmed gäller att

$$a^b + 1 = (a+1)\left(1 + (-a) + (-a)^2 + \cdots + (-a)^{b-1}\right).$$

Sålunda är $a^b + 1$ delbart med $a + 1$.

b) Antag nu att k inte är en potens av 2. Då är $k = 2^n \cdot b$ för något naturligt tal n och något udda heltal $b \geq 3$. Detta medför att $2^k + 1 = 2^{2^n \cdot b} + 1 = \left(2^{2^n}\right)^b + 1$ är delbart med $2^{2^n} + 1$. Eftersom $b \geq 3$ så gäller att

$$1 < 2^{2^n} + 1 < \left(2^{2^n}\right)^b + 1 = 2^k + 1.$$

Detta visar att $2^{2^n} + 1$ är en icke-trivial delare till $2^k + 1$, som i så fall inte är ett primtal.