LUNDS UNIVERSITET

Tentamenskrivning
MATA15 Algebra: delprov 2, 6hp
Fredagen den 16 maj 2014

Matematikcentrum
Matematik NF

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Låt ℓ vara linjen genom punkten $(5,4,4)$ som är vinkelrät mot planet $2x+2y+3z=7$. Bestäm det kortaste avståndet från punkten $P=(1,1,3)$ till linjen ℓ och ange speciellt den punkt på ℓ som ligger närmast P. (Ortonormerat koordinatsystem förutsätts.)

Lösning: Eftersom ℓ är vinkelrät mot det givna planet så är normalvektorn $u=(2,2,3)$ till planet en riktningsvektor för linjen. En ekvation på parameterform för ℓ ges alltså av

$$\begin{cases} x = 5+2t \\ y = 4+2t \\ z = 4+3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

För att beräkna det kortaste avståndet från punkten $P=(1,1,3)$ till linjen L så söker vi den punkt $R=(5+2t,4+2t,4+3t)$ på ℓ som ligger närmast P. Denna punkt bestäms av att vektorn $\overline{PR}$ är ortogonal mot ℓ, dvs av att dess skalärprodukt med linjens riktningsvektor är lika med noll. Vi har att

$$\overline{PR} = (5+2t,4+2t,4+3t)-(1,1,3) = (4+2t,3+2t,1+3t)$$

och

$$(\overline{PR}|u)=0 \iff (4+2t)\cdot 2+(3+2t)\cdot 2+(1+3t)\cdot 3=0 \iff 17t+17=0 \iff t=-1.$$

Detta ger att $R=(3,2,1)$, $\overline{PR}=(2,1,-2)$, och det kortaste avståndet $d(P,\ell)$ från punkten P till linjen ℓ ges av

$$d(P,\ell)=|\overline{PR}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3.$$

Svar: $d(P,\ell)=3$. Den närmaste punkten är $(3,2,1)$.

2. Ange en *positivt orienterad ortonormerad bas* e_1, e_2, e_3 sådan att vektorn e_1 är parallell med linjen $(x,y,z)=(1+t,7,1-t)$ och båda vektorerna e_1 och e_2 är parallella med planet $x-2y+z=3$. På hur många sätt kan en sådan bas väljas?

Lösning: Vektorn e_1 är en enhetsvektor parallell med den givna linjens riktningsvektor $(1,0,-1)$. Vi har två möjligheter att välja e_1: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ och $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$. Eftersom både e_1 och e_2 är parallella med planet $x-2y+z=3$, så är e_3 parallell med

Var god vänd!

planets normalvektor $(1,-2,1)$. Vektorn e_3 kan alltså väljas på två sätt: $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ och $-\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$. Till varje e_1 och e_3 kan vi bestämma e_2 entydigt ur sambandet

$$e_2 = e_3 \times e_1 = -e_1 \times e_3.$$

Detta innebär att vi har *fyra* möjliga baser som uppfyller de givna villkoren. Till exempel, för $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ och $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ får vi

$$e_2 = -e_1 \times e_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,-1) \times (1,-2,1) =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}(0\cdot 1-(-1)\cdot(-2), (-1)\cdot 1-1\cdot 1, 1\cdot(-2)-0\cdot 1) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(-2,-2,-2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Svar: T. ex. : $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$. Det finns fyra baser som uppfyller de givna villkoren.

3. Lös det lineära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = a+1 \\ (a+1)x + ay + z = a+1 \\ ax + (a-1)y + (a-2)z = 2a-2 \end{cases}$$

för alla värden på det reella talet a för vilka detta är möjligt.

Lösning: Vi använder Gausselimination. Vi börjar med att att eliminera variabeln x från den andra och tredje ekvationen genom att multiplicera den första ekvationen med $-(a+1)$ respektive med $-a$ och addera den ledvis till den andra, respektive den tredje ekvationen.

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = a+1 \\ -y + (1-(a+1)^2)z = (a+1)-(a+1)^2 \\ -y + (a-2-a(a+1))z = 2a-2-a(a+1) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x + y + (a+1)z = a+1 \\ -y - (a^2+2a)z = -a^2-a \\ -y - (a^2+2)z = -a^2+a-2 \end{cases}$$

Slutligen eliminerar vi variabeln y från den tredje ekvationen med hjälp av den andra ekvationen. Systemet blir:

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = a+1 \\ y + (a^2+2a)z = a^2+a \\ (2a-2)z = 2a-2 \end{cases}.$$

Vi observerar att för $2a-2 \neq 0$, dvs för $a \neq 1$ så har systemet entydig lösning (eftersom vi i så fall kan lösa ut variabeln z från den tredje ekvationen, och sedan y och x från den andra, respektive den första ekvationen):

$$\begin{cases} x = a \\ y = -a \\ z = 1 \end{cases}.$$

För $a = 1$ blir systemet

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ \quad\;\; y + 3z = 2 \\ \qquad\quad\; 0 = 0 \end{cases}.$$

Vi sätter $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ och löser ut y och sedan x från de första ekvationerna:

$$\begin{cases} x = \quad t \\ y = -3t + 2 \\ z = \quad t \end{cases}.$$

Svar: Systemet har entydig lösning $(x, y, z) = (a, -a, 1)$ för $a \neq 1$ och har oändligt många lösningar $(x, y, z) = (t, -3t + 2, t)$, $t \in \mathbb{R}$ för $a = 1$.

4. Låt M vara planet genom punkterna $(1, 4, 0)$, $(2, 2, 0)$ och $(0, 2, -2)$. Sfären med centrum i punkten $(1, 1, 3)$ och radie 5 skär planet M utmed en cirkel.

a) Bestäm ekvationen på normalform till planet M.

b) Beräkna det kortaste avståndet från sfärens medelpunkt till M.

c) Bestäm skärningscirkelns medelpunkt och radie. (Positivt ON-system)

Lösning:

a) Med hjälp av de givna punkterna i planet M bestämmer vi två icke-parallella vektorer u och v i planet och sedan en normalvektor till planet M med hjälp av vektorprodukten $u \times v$. Låt $u = (2, 2, 0) - (1, 4, 0) = (1, -2, 0)$ och $v = (0, 2, -2) - (1, 4, 0) = (-1, -2, -2)$. Vi har att $u \times v = (4, 2, -4) = 2(2, 1, -2)$ är en normal vektor till M. Planets ekvation på normalform ges av

$$2x + y - 2z = D,$$

där konstanten D bestäms exempelvis utifrån att punkten $(1, 4, 0)$ ligger i planet $(2 \cdot 1 + 4 - 2 \cdot 0 = D)$. Planets ekvation på normalform ges av

$$2x + y - 2z = 6.$$

b) Det kortaste avståndet från sfärens medelpunkt $P = (1, 1, 3)$ till planet M bestämmer vi med hjälp av avståndsformeln:

$$\mathrm{d}(P, M) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 - 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

c) Skärningcirkelns medelpunkt C är den ortogonala projektionen av sfärens medelpunkt på planet M. För att bestämma denna punkt betraktar vi linjen ℓ som är vinkelrät mot planet M och går genom sfärens medelpunkt. En ekvation på parameterform för ℓ ges av

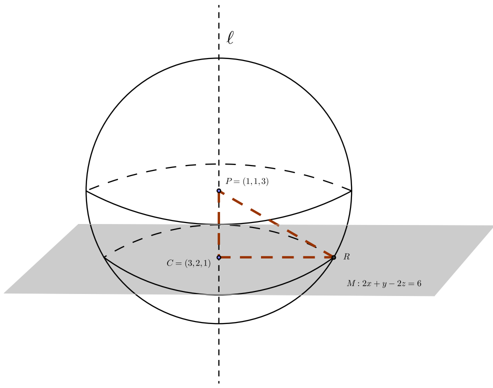
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + \;\; t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Punkten C fås som skärningspunkten mellan linjen ℓ och planet M, alltså för $t \in \mathbb{R}$ som uppfyller

$$2(1 + 2t) + (1 + t) - 2(3 - 2t) = 6 \iff t = 1.$$

Var god vänd!

Detta ger $C = (3, 2, 1)$. För att bestämma skärningscirkelns radie, låt R vara en godtycklig punkt på cirkeln. Eftersom R också ligger på sfären så är $|PR|$ lika med sfärens radie. I den rätvinkliga triangeln PCR känner vi alltså till längden av kateten PC ($|PC| = 3$) och längden av hypotenusan PR. Skärningscirkelns radie ges av



Figur 1: Skärning mellan sfär och plan

längden av kateten CR. Med hjälp av Pythagoras sats får vi att $|CR| = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.
Svar: **a)** $2x + y - 2z = 6$, **b)** 3, **c)** Medelpunkt $(3, 2, 1)$, radie 4.

5. Låt $P = (2, -1, 0)$, $Q = (0, -1, 0)$ och låt R vara en punkt i xz-planet som ligger på avstånd $\sqrt{3}$ till var och en och punkterna P och Q. Låt ℓ vara linjen genom punkten P som är vinkelrät mot planet genom P, Q och R. Bestäm alla punkter $S \in \ell$ sådan att tetraedern $PQRS$ har volymen $\frac{4}{3}$. (Positivt ON-system)

Lösning: Vi börjar med att bestämma $R = (x, 0, z)$ i xz-planet som uppfyller $|\overline{PR}| = |\overline{QR}| = \sqrt{3}$. Vi har att $\overline{PR} = (x - 2, 1, z)$, $\overline{QR} = (x, 1, z)$ och villkoret $|\overline{PR}| = |\overline{QR}| = \sqrt{3}$ ger

$$(x-2)^2 + 1^2 + z^2 = x^2 + 1^2 + z^2 = 3.$$

Från den första likheten får vi att $-4x + 4 = 0$ vilket ger $x = 1$ och insättning i den andra likheten ger $z^2 = 1$, dvs $z = \pm 1$. Det finns alltså två punkter, $(1, 0, 1)$ och $(1, 0, -1)$, som uppfyller det givna villkoret.

Vidare bestämmer vi en ekvation för linjen ℓ genom punkten P som är vinkelrät mot planet genom punkterna P, Q och R. En riktningsvektor för ℓ fås med hjälp av vektorprodukten $\overline{PQ} \times \overline{PR}$.

Om vi väljer $R = (1, 0, 1)$ så är $\overline{PR} = (-1, 1, 1)$ och $\overline{PQ} \times \overline{PR} = (-2, 0, 0) \times (-1, 1, 1) = (0, 2, -2) = 2(0, 1, -1)$. Vektorn (0, 1,-1) utgör en riktningsvektor för linjen ℓ så en ekvation för linjen ges av

$$\begin{cases} x = \quad 2 \\ y = -1 + t \\ z = \quad\;\; - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi ska nu bestämma $S \in \ell$ så att tetraedern $PQRS$ har den givna volymen. Vi vet att volymen av tetraedern $PQRS$ är lika med en sjättedel av volymen av den parallellepiped som de riktade sträckorna $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ och $\overline{PS}$ spänner upp, vilken kan beräknas med hjälp av volymprodukten av motsvarande vektorer. Vi har alltså att

$$Vol(PQRS) = \frac{1}{6}|V(\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS})| = \frac{4}{3}$$

vilket ger $V(\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}) = \pm 8$. Det gäller alltså att bestämma S (dvs motsvarande värden på parametern t) som gör att den sista likheten gäller. Vi har att

$$\overline{PQ} = (-2, 0, 0), \quad \overline{PR} = (-1, 1, 1)$$

samt

$$\overline{PS} = (2, -1 + t, -t) - (2, -1, 0) = (0, t, -t),$$

och härmed är

$$V(\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & -t \end{vmatrix} = 4t.$$

$V(\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}) = 4t = \pm 8$ ger nu $t = \pm 2$. För $t = 2$ får vi punkten $S = (2, 1, -2)$, medan vi för $t = -2$ får punkten $S = (2, -3, 2)$.

På samma sätt får vi, om vi väljer $R = (1, 0, -1)$, att $\overline{PR} = (-1, 1, -1)$ och då blir $\overline{PQ} \times \overline{PR} = -2(0, 1, 1)$. Detta ger linjen ℓ genom P vinkelrät mot planet genom P, Q, och R:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = \phantom{-1+{}} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

alltså $S = (2, -1 + t, t)$ och $PS = (0, t, t)$. Volymprodukten av vektorerna $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ och $\overline{PS}$ ges av

$$V(\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = -4t.$$

Tetraedern $PQRS$ har volymen $4/3$ om och endast om $-4t = \pm 8$ dvs $t = \mp 2$. För $t = -2$ får vi $S = (2, -3, -2)$ medan $t = 2$ ger $S = (2, 1, 2)$.

Svar: $R = (1, 0, 1)$ ger $S = (2, 1, -2)$ eller S $= (2, -3, 2)$. $R = (1, 0, -1)$ ger $S = (2, 1, 2)$ eller $S = (2, -3, -2)$.

6. Betrakta 3×3 matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Beräkna inversen A^{-1} till A.
b) Visa att $A^3 - A = A^2 - E$. (E betecknar enhetsmatrisen.)
c) Ange $A^n - A^{n-2}$ för alla naturliga tal $n \geq 3$.

Lösning: För att beräkna inversen till matrisen A ställer vi upp ekvationssystemet $AX = Y$ där X och Y är 3×1 matriser som följer:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ \phantom{x_1 + x_2 +{}} x_3 = y_2 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 - x_2 \\ x_3 = y_2 \\ x_2 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 - y_3 \\ x_2 = y_3 \\ x_3 = y_2 \end{cases}.$$

Detta ger

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Var god vänd!

b) Direkt beräkning ger

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^3 - A = A^2 - E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Enligt **(b)** gäller att $A^3 - A = A^2 - E$ och man kan lätt kontrollera att $A^4 - A^2 = A^2 - E$:

$$A^4 - A^2 = A(A^3 - A) \overset{(b)}{=} A(A^2 - E) = A^3 - A \overset{(b)}{=} A^2 - E.$$

Vi förmodar att $A^n - A^{n-2} = A^2 - E$ för alla naturliga tal $n \geq 3$. Vi visar detta med hjälp av induktion.

Antag att likheten gäller för $n = p$ där p är är godtyckligt heltal större än 3, dvs

$$A^p - A^{p-2} = A^2 - E. \ (IA)$$

Vi vill visa att i så fall gäller likheten för $n = p + 1$:

$$A^{p+1} - A^{p-1} = A^2 - E.$$

Vi har att

$$A^{p+1} - A^{p-1} = A(A^p - A^{p-2}) \overset{(IA)}{=} A(A^2 - E) = A^3 - A \overset{(b)}{=} A^2 - E.$$

Enligt induktionsprincipen följer att $A^n - A^{n-2} = A^2 - E$ för alla naturliga tal $n \geq 3$.

Svar: **a)** $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, **c)** $A^n - A^{n-2} = A^2 - E$ för alla naturliga tal $n \geq 3$.