LUNDS UNIVERSITET

Tentamenskrivning
MATA15 Algebra: delprov 1, 6hp
Lördagen den 22 mars 2014

Matematikcentrum
Matematik NF

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Ange samtliga uppsättningar av heltal x, y, z som uppfyller *båda* ekvationerna

$$x + 2y + 24z = 13 \qquad \text{och} \qquad x - 11y + 17z = 8.$$

Lösning:
a) Vi börjar med att lösa ut en av variablerna med avseende på de andra två från en av ekvationerna och använda detta för att reducera den andra ekvationen till en vanlig diofantisk ekvation med två variabler. Här väljer vi att lösa ut x från den andra ekvationen och sätter in den i den första ekvationen:

$$\begin{cases} x + \ 2y \ + 24z = 13 \\ x - 11y + 17z = \ \ 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 11y - 17z + 8 \\ 13y + 7z = 5 \end{cases}.$$

Den diofantiska ekvationen

$$13y + 7z = 5 \qquad (*)$$

är lösbar eftersom $SGD(13, 7) = 1|5$. Vi bestämmer en partikulär lösning till $(*)$ genom att först söka en partikulär lösning till hjälpekvationen $13y + 7z = 1$ med hjälp av Euklides algoritm. Vi har att

$$\begin{aligned} 13 =& 7 \cdot 1 + 6 \\ 7 =& 6 \cdot 1 + 1 \end{aligned}$$

vilket ger

$$1 = 7 - 6 = 7 - (13 - 7) = 7 - 13 + 7 = 13 \cdot (-1) + 7 \cdot 2.$$

Detta ger att $y_0 = -1$ och $z_0 = 2$ utgör en lösning till hjälpekvationen och härmed är $y_1 = -5$ och $z_1 = 10$, en lösning till ekvationen $(*)$, dvs:

$$13 \cdot (-5) + 7 \cdot 10 = 5. \qquad (**)$$

Om vi bildar differensen mellan $(*)$ och $(**)$ får vi att

$$13(y + 5) + 7(z - 10) = 0 \iff 13(y + 5) = -7(z - 10).$$

Eftersom $SGD(13, 7) = 1$ så måste $13|(z - 10)$ och $7|(y + 5)$ och härmed är

$$\begin{cases} y = -5 + 7n \\ z = 10 - 13n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

Var god vänd!

samtliga lösningar till den diofantiska ekvationen $(*)$. Vi kan slutligen lösa ut x från systemet ovan:

$$x = 11y - 17z + 8 = 11(-5 + 7n) - 17(10 - 13n) + 8 = -217 + 298n.$$

Samtliga uppsättningar av heltal x, y, z som uppfyller båda de givna ekvationerna ges alltså av:

$$\begin{cases} x = -217 + 298n \\ y = -5 + 7n \\ z = 10 - 13n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Svar: $x = -217 + 298n$, $y = -5 + 7n$, $z = 10 - 13n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Lös följande olikheter:

a) $|x - |x - 1| + 1| \leq 2$, **b)** $\dfrac{2x^2 - 7x + 9}{x^2 - 5x + 4} \geq 1$.

Lösning: **a)**. Vi har att

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{om } x - 1 \geq 0, \text{ dvs. om } x \geq 1 \\ -x + 1, & \text{om } x - 1 < 0, \text{ dvs. om } x < 1 \end{cases}.$$

Detta ger upphov till följande två fall:
Fall 1: för $x \geq 1$ är olikheten ekvivalent med

$$|x - (x - 1) + 1| \leq 2 \iff |2| \leq 2$$

vilket är sant oavsett x i det aktuella intervallet. Olikheten är alltså satisfierad för alla $x \in [1, \infty)$.
Fall 2: för $x < 1$ är olikheten ekvivalent med

$$|x - (-x + 1) + 1| \leq 2 \iff |2x| \leq 2 \iff -2 \leq 2x \leq 2 \iff -1 \leq x \leq 1.$$

Detta visar att i detta fall är olikheten satisfierad för alla $x \in [-1, 1)$.
Den ursprungliga olikheten gäller för alla x som satisfierar *fall 1* eller *fall 2*, dvs $x \in [-1, 1) \cup [1, \infty) = [-1, \infty)$.
a). Den givna olikheten är ekvivalent med:

$$\frac{2x^2 - 7x + 9}{x^2 - 5x + 4} - 1 \geq 0 \iff \frac{2x^2 - 7x + 9 - x^2 + 5x - 4}{x^2 - 5x + 4} \geq 0 \iff \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - 5x + 4} \geq 0$$

$$\iff \frac{(x - 1)^2 + 4}{(x - 1)(x - 4)} \geq 0$$

I det sista steget har vi kvadratkompletterat täljaren och faktoriserat nämnaren. Observera att uttrycket i täljaren är positivt för alla reella x. Det rationella uttrycket i vänsterledet är positivt precis då nämnaren är positivt, dvs för $x < 1$ eller $x > 4$. Detta kan ses med hjälp av följande teckenstudium:

x		1		4	
$((x-1)^2+4)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{((x-1)^2+4)}{(x-1)(x-4)}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

Svar:
a)$x \in [-1, \infty)$, **b)** $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$.

3. Bestäm koefficienten till x^3 i utvecklingen av produkten $(1+x)^7(1-x)^4$.

Lösning: Enligt binomialsatsen har vi att

$$(1+x)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^k \quad \text{samt} \quad (1-x)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-x)^k.$$

Produkten $(1+x)^7(1-x)^4$ är ett polynom av grad 11 och termen innehållande x^3 fås då man multiplicerar den konstanta termen i den ena utvecklingen med x^3-termen i den andra utvecklingen samt då x-termen från en av utvecklingarna multipliceras med x^2-termen från den andra utvecklingen. Den sökta termen fås alltså som:

$$\binom{7}{0}x^0 \cdot \binom{4}{3}(-x)^3 + \binom{7}{1}x^1 \cdot \binom{4}{2}(-x)^2 + \binom{7}{2}x^2 \cdot \binom{4}{1}(-x)^1 + \binom{7}{3}x^3 \cdot \binom{4}{0}(-x)^0.$$

Den sökta koefficienten är

$$\binom{7}{0}\cdot\binom{4}{3} + \binom{7}{1}\cdot\binom{4}{2} - \binom{7}{2}\cdot\binom{4}{1} + \binom{7}{3}\cdot\binom{4}{0} = -1\cdot 4 + 7\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!} - \frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot 4 + \frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot 1 =$$

$$= -4 + 42 - 84 + 35 = -11.$$

Svar: -11

4. Visa att ekvationen

$$z^3 - (1+4i)z^2 + (15+15i)z + 50 - 50i = 0$$

har en rent imaginär rot och lös sedan ekvationen fullständigt.

Lösning: Om $z = ai$, $a \in \mathbb{R}$, är en rent imaginär rot till den givna ekvationen då gäller att

$$(ai)^3 - (1+4i)(ai)^2 + (15+15i)ai + 50 - 50i = 0 \iff$$

$$-a^3 i + a^2 + 4a^2 i + 15ai - 15a - 50i + 50 \iff (a^2 - 15a + 50) + (-a^3 + 4a^2 + 15a - 50)i = 0.$$

Likheten ovan gäller om och endast om både real- och imaginärdelen av uttrycket i vänsterledet är lika med 0, dvs

$$a^2 - 15a + 50 = 0 \quad \text{och} \quad -a^3 + 4a^2 + 15a - 50 = 0.$$

Den första ekvationen har rötterna $a = 5$ och $a = 10$ och insättning i den andra ekvationen visar att endast $a = 5$ satisfierar båda ekvationerna.

Var god vänd!

Detta ger att $z = 5i$ är en rent imaginär rot till den ursprungliga ekvationen och härmed är $z-5i$ en delare till polynomet $p(z) = z^3-(1+4i)z^2+(15+15i)z+50-50i$. Vi utför polynomdivisionen mellan $p(z)$ och $z-5i$ och får kvoten

$$q(z) = z^2 + (-1+i)z + 10 + 10i.$$

Ekvationens övriga rötter satisfierar $q(z) = 0$. Vi löser denna andragradsekvation med komplexa koefficienter med känd lösningsmetod. Först kvadratkompletterar vi uttrycket i vänsterledet:

$$z^2 + 2\left(\frac{-1+i}{2}\right)z + \left(\frac{-1+i}{2}\right)^2 = \left(\frac{-1+i}{2}\right)^2 - 10 - 10i$$

$$\iff \left(z + \frac{(-1+i)}{2}\right)^2 = \frac{-2i}{4} - 10 - 10i \iff \left(z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = -10 - \frac{21}{2}i$$

Vi sätter nu $w = z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ och skriver $w = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$. Ekvationen ovan blir:

$$(x+iy)^2 = -10 - \frac{21}{2}i. \quad (*)$$

Identifiering av real- och imaginärdelar samt absolutbelopp av vänster- och högerled ger:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -10 & (\text{Re } w^2 = \text{Re } (-10 - \frac{21}{2}i)) \\ 2xy = -\frac{21}{2} & (\text{Im } w^2 = \text{Im } (-10 - \frac{21}{2}i)) \\ x^2 + y^2 = \frac{29}{2} & (|w^2| = |-10 - \frac{21}{2}i|) \end{cases}.$$

Den sista likheten följer av att $\left|-10 - \frac{21}{2}i\right| = \sqrt{100 + \frac{441}{4}} = \sqrt{\frac{841}{4}} = \frac{29}{2}$.
Ledvis addition av den första och den sista ekvationen ger

$$2x^2 = \frac{9}{2} \iff x^2 = \frac{9}{4} \iff x = \pm\frac{3}{2}.$$

Insättning i den andra ekvationen ger

$$y = -\frac{21}{2x} = \mp\frac{7}{2} \text{ då } x = \pm\frac{3}{2}$$

Vi får två lösningar till ekvationen $(*)$, nämligen:

$$w_1 = \frac{3}{2} - \frac{7}{2}i \text{ och } w_2 = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2}i.$$

Ur sambandet $w = z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ dvs. $z = w + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ får vi lösningarna till ekvationen $q(z) = 0$:

$$z_1 = w_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = 2 - 4i \text{ och } z_2 = w_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = -1 + 3i.$$

Svar: Ekvationen har rötterna $5i$, $-1+3i$ och $2-4i$.

5. Skriv talet

$$w = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}-\sqrt{6}\, i} \right)^{12}$$

på polär form och lös sedan ekvationen

$$z^6 = \frac{1}{w}.$$

Skissa rötterna i det komplexa talplanet.

Lösning: Vi har att

$$|1-i| = \sqrt{2},\ \ 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i(-\sin\frac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Vi har också att $|\sqrt{2}-\sqrt{6}i| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ och vi skriver

$$\sqrt{2}-\sqrt{6}i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Detta ger

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}-\sqrt{6}i}\right)^{12} = \left(\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^{12} = \left(\frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\right)^{12} = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{12} = \frac{1}{2^{12}}e^{i\pi},$$

och härmed är

$$\frac{1}{w} = 2^{12}e^{-i\pi} = 2^{12}e^{i\pi}$$

Den givna ekvationen kan skrivas som

$$z^6 = 2^{12}e^{i\pi}.$$

Vi skriver nu $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ och enligt De Moivres formel gäller att

$$z^6 = r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = r^6e^{6i\theta}.$$

Ekvationen blir:

$$r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = 2^{12}(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Detta medför att

$$\begin{cases} r^6 = 2^{12} \\ 6\theta = \pi + 2\pi\cdot k,\ \ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} r = 2^2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k,\ \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}.$$

Lösningarna till ekvationen $z^6 = 2^{12}e^{i\pi}$ fås för $k = 0,1,2,3,4,5$:

$$z_k = 4(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k)),$$

dvs.,

$$z_0 = 4(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 2\sqrt{3} + 2i,$$

$$z_1 = 4(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})) = 4(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = 4i$$

Var god vänd!

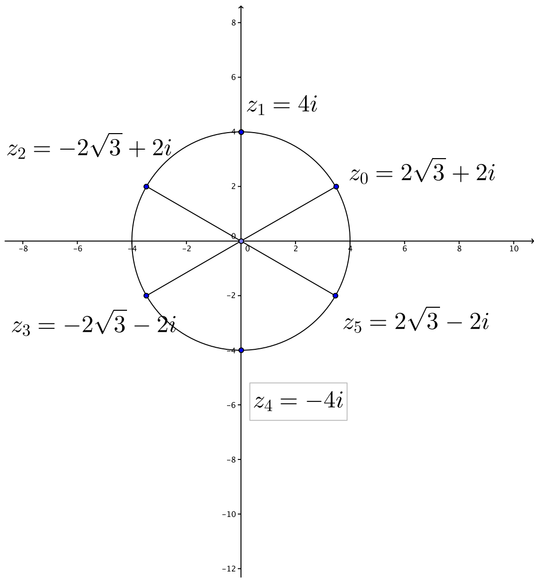
$$z_2 = 4(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})) = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = -2\sqrt{3} + 2i$$

$$z_3 = 4(\cos(\frac{\pi}{6} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \pi)) = 4(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6})) = -2\sqrt{3} - 2i,$$

$$z_4 = 4(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})) = 4(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = -4i,$$

$$z_5 = 4(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3})) = 4(\cos(\frac{11\pi}{6}) + i\sin(\frac{11\pi}{6})) = 2\sqrt{3} - 2i,$$

Punkterna z_k ligger på en cirkel med centrum i punkten origo och radie 4 i det komplexa talplanet, jämnt fördelade på vinkelavståndet $\frac{\pi}{3}$, se figuren nedan.



Figur 1: ekvationens rötter

Svar: Ekvationen har rötterna $2\sqrt{3} + 2i$, $4i$, $-2\sqrt{3} + 2i$, $-2\sqrt{3} - 2i$, $-4i$, $2\sqrt{3} - 2i$.

6. Visa att likheten

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!} = 2 - \frac{n+3}{(n+2)!}$$

gäller för alla naturliga tal n.

Lösning:
För $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ låt P_n beteckna likheten ovan. Vi verifierar först att P_0 är sant. Vi har att

$$VL_0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \quad \text{och} \quad HL_0 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

P_0 är alltså sant.
Antag nu att P_p är sant för något naturligt tal $p \geq 0$ dvs.

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{p} \frac{k^2 + 3k + 1}{(k+2)!}}_{VL_p} = \underbrace{2 - \frac{p+3}{(p+2)!}}_{HL_p} \ (IA).$$

Vi visar att i så fall gäller att P_{p+1} är sant, dvs.

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{p+1} \frac{k^2+3k+1}{(k+2)!}}_{VL_{p+1}} = \underbrace{2-\frac{p+4}{(p+3)!}}_{HL_{p+1}} \quad .$$

Vi har att

$$\begin{aligned} VL_{p+1} =& VL_p + \frac{(p+1)^2+3(p+1)+1}{((p+1)+2)!} \overset{IA}{=} HL_p + \frac{p^2+2p+1+3p+3+1}{(p+3)!} \\ =& 2-\frac{p+3}{(p+2)!} + \frac{p^2+5p+5}{(p+3)!} = 2 - \frac{(p+3)^2-(p^2+5p+5)}{(p+3)!} \\ =& 2-\frac{p^2+6p+9-p^2-5p-5}{(p+3)!} = 2-\frac{p+4}{(p+3)!} = HL_{p+1}. \end{aligned}$$

Sålunda är P_{p+1} sant om P_p är sant. Detta tillsammans med det faktum att P_0 är sant medför enligt induktionsprincipen att P_n är sant för alla naturliga tal n.