LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Tentamenskrivning
MATA15 Algebra: delprov 1, 6hp
Måndagen den 4 november 2013

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Ange det minsta positiva heltalet a sådant att den diofantiska ekvationen

$$133x + 35y = 100a$$

är lösbar. Ange samtliga positiva lösningar till ekvationen för detta värde på a.

Lösning: Den diofantiska ekvationen $133x + 35y = 100a$ är lösbar om $SGD(133, 35)$ delar högerledet $100a$. Vi har att $SGD(133, 35) = 7$, och $7 \big| 100a$ gäller om $7 \big| a$. Det minsta positiva heltalet a för vilket ekvationen är lösbar är alltså $a = 7$.
För $a = 7$ dividerar vi både vänster och högerledet i den givna ekvationen med 7 och får den ekvivalenta ekvationen

$$19x + 5y = 100. \qquad (*)$$

Vi följer den allmänna lösningsmetoden för diofantiska ekvationer och bestämmer först en partikulär lösning till hjälpekvationen $19x + 5y = 1$ med Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} \underline{19} =& 3 \cdot \underline{5} + \underline{4} \\ \underline{5} =& 1 \cdot \underline{4} + 1. \end{aligned}$$

Detta ger

$$1 = \underline{5} - \underline{4} = \underline{5} - (\underline{19} - 3 \cdot \underline{5}) = \underline{5} - \underline{19} + 3 \cdot \underline{5} = \underline{19} \cdot (-1) + \underline{5} \cdot 4.$$

$x_0 = -1$ och $y_0 = 4$ är alltså en lösning till hjälpekvationen och härmed gäller att $x_1 = 100 \cdot (-1) = -100$ och $y_1 = 100 \cdot 4 = 400$ är en lösning till ekvationen $(*)$ dvs

$$19 \cdot (-100) + 5 \cdot (400) = 100. \qquad (**).$$

Om vi bildar differensen mellan $(*)$ och $(**)$ får vi att

$$19(x + 100) + 5(y - 400) = 0 \iff 19(x + 100) = -5(y - 400).$$

Eftersom $SGD(19, 5) = 1$ får vi att $19|(y - 400)$ och $5|(x + 100)$, vilket medför att den allmänna lösningen till den givna diofantiska ekvationen ges av:

$$\begin{cases} x = -100 + 5n \\ y = 400 - 19n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Var god vänd!

Det återstår att bestämma de värden på $n \in \mathbb{Z}$ sådana att $x > 0$ och $y > 0$. Vi har att $-100 + 5n > 0 \iff n > 20$ och $y > 0 \iff n < \frac{400}{19} = 21,05$. Det enda heltalsvärdet som ger positiva lösningar är $n = 21$. Vi får $x = -100 + 5 \cdot 21 = 5$ och $y = 400 - 19 \cdot 21 = 1$.
Svar: $a = 7$, $x = 5$, $y = 1$.

2. Polynomet

$$p(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$$

har ett nollställe i $z = -1 - i$. Lös ekvationen $p(z) = 0$ fullständigt.

Lösning: Eftersom polynomet p har reella koefficienter så är $z = -1 + i$ ett nollställe till p. Enligt faktorsatsen gäller att p är delbart med $(z+1+i)(z+1-i) = z^2+2z+2$. Polynomdivision ger att

$$p(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^3 - 1).$$

De övriga rötterna till ekvationen $p(z) = 0$ ges alltså av $z^3 - 1 = 0$. Det är lätt att se $z = 1$ är en rot till denna ekvation och därmed gäller att $z^3 - 1$ är delbart med $z - 1$. Vi dividerar $z^3 - 1$ med $z - 1$ och får $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$. Ekvationen $z^2 + z + 1 = 0$ har rötterna $-\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Svar: Polynomet p har nollställena $-1 \pm i$, 1, $-\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. Bestäm den konstanta termen i utvecklingen av

$$\left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{ix^2}\right)^{20}.$$

(i betecknar den imaginära enheten: $i^2 = -1$.)

Lösning: Eftersom $\frac{1}{i} = -i$ så är $-\frac{1}{ix^2} = \frac{i}{x^2}$. Binomialsatsen ger:

$$\left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{ix^2}\right)^{20} = \left(\frac{x^3}{2} + \frac{i}{x^2}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot \left(\frac{x^3}{2}\right)^{20-k} \cdot \left(\frac{i}{x^2}\right)^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \frac{x^{60-3k}}{2^{20-k}} \cdot \frac{i^k}{x^{2k}} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \frac{i^k}{2^{20-k}} \cdot x^{60-5k}.$$

Den konstanta termen, dvs koefficienten till x^0, fås för k sådant att $60 - 5k = 0$, alltså för $k = 12$. Den sökta koefficienten är

$$\binom{20}{8} \frac{i^{12}}{2^{20-12}} = \frac{1}{2^8} \binom{20}{12}.$$

Svar: $2^{-8}\binom{20}{12}$

4. Lös följande olikheter:

a) $2x > |x^2 - 10x + 24| + 8$, **b)** $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2 - x + 1} \geq \dfrac{1 - 2x}{x^3 + 1}$.

Lösning:

a). Vi börjar med att observera att olikheten är ekvivalent med $|x^2-10x+24| < 2x-8$. Eftersom vänsterledet är positivt för alla $x \in \mathbb{R}$ så är olikheten meningsfull endast då högerledet är strängt positivt, dvs för $x > 4$.

Vi faktoriserar och teckenstuderar $x^2 - 10x + 24$. Vi beräknar nollställena till detta polynom med vår favoritmetod och finner $x = 4$ och $x = 6$, vilket ger faktoriseringen $x^2-10x+24 = (x-4)(x-6)$. Detta visar att $x^2-10x+24 \geq 0$ för $x \in (-\infty, 4]\cup[6, \infty)$ och strängt negativt för $x \in (4, 6)$.

Vi har alltså att

$$|x^2-10x+24| = \begin{cases} x^2 - 10x + 24, & \text{om } x^2 - 10x + 24 \geq 0, \ \text{dvs.} x \in (-\infty, 4] \cup [6, \infty) \\ -(x^2 - 10x + 24), & \text{om } x^2 - 10x + 24 < 0, \ \text{dvs.} x \in (4, 6) \end{cases}$$

och eftersom vår olikhet inte kan gälla för $x \leq 4$ så har vi följande två fall:

Fall 1: för $x \in (4, 6)$ är olikheten ekvivalent med

$$-(x^2 - 10x + 24) < 2x - 8 \iff x^2 - 8x + 16 > 0 \iff (x - 4)^2 > 0 \iff x \neq 4.$$

så olikheten gäller för alla $x \in (4, 6)$.

Fall 2: för $x \in [6, \infty)$ är olikheten ekvivalent med

$$x^2 - 10x + 24 < 2x - 8 \iff x^2 - 12x + 32 < 0 \iff (x - 8)(x - 4) < 0$$

Teckenstudium visar att denna olikhet är satisfierad för $x \in (4, 8)$. I detta fall är den ursprungliga olikheten satisfierad för alla $x \in [6, \infty) \cap (4, 8) = [6, 8)$.

Den ursprungliga olikheten gäller för alla x som satisfierar *fall 1* eller *fall 2*, alltså för $x \in (4, 6) \cup [6, 8) = (4, 8)$.

(Alternativt kan man skriva olikheten som $|(x - 4)(x - 6)| < 2(x - 4)$ och använda det faktum att vi måste ha $x > 4$ för att olikheten ska gälla. För $x > 4$ har vi att

$$(x - 4)|x - 6| < 2(x - 4) \iff |x - 6| < 2 \iff -2 < x - 6 < 2 \iff 4 < x < 8.$$

Observera att villkoret $x > 4$ är väsentligt!)

b). Vi löser olikheten med standard lösningsmetod vilket innebär att vi flyttar alla uttryck till en sida, skriver dem på gemensamt bråkstreck och teckenstuderar det resulterade uttrycket. Vi börjar med att undersöka nämnarna och vi observerar att $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Vidare gäller att $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. De rationella uttrycken som förekommer i olikheten är definierade för alla $x \neq -1$. Den givna olikheten är ekvivalent med:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1 - 2x}{(x^3 + 1)} \geq 0 \iff \frac{(x^2 - x + 1) - 2(x + 1) - (1 - 2x)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \geq 0$$

$$\iff \frac{x^2 - x - 2}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \geq 0 \iff \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \geq 0$$

$$\iff \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} \geq 0, \ x \neq -1.$$

Eftersom nämnaren till vänsterledet i den sista olikheten är strängt positivt för alla reella x kan vi dra slutsatsen att den ursprungliga olikheten är uppfylld för $x \geq 2$.

Svar: **a)**$(4, 8)$, **b)**$[2, \infty)$.

Var god vänd!

5. Lös ekvationen

$$z^6 = \left(\frac{\sqrt{2}(1 - i\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+i)(1-i)} \right)^{58}$$

och skissa rötterna i det komplexa talplanet.

Lösning: Vi börjar med att skriva högerledet på polärform. Vi har att

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}, \ \ \sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \ \text{ och } \ 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Högerledet kan alltså skrivas som

$$\left(\frac{\sqrt{2}\cdot 2e^{-i\pi/3}}{2\cdot e^{i\pi/6}\cdot \sqrt{2}e^{-i\pi/4}} \right)^{58} = (e^{i(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})})^{58} = (e^{-i\frac{\pi}{4}})^{58} =$$

$$= e^{-i\frac{58\pi}{4}} = e^{-i\frac{29\pi}{2}} = e^{-i(14\pi+\frac{\pi}{2})} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

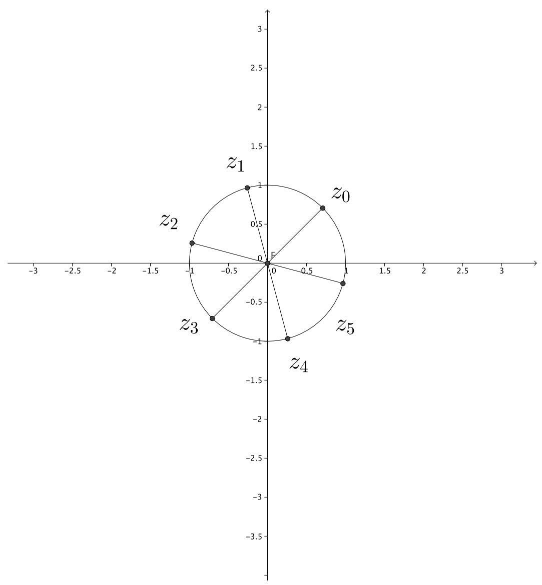
Den givna binomiska ekvationen kan alltså skrivas som $z^6 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Vi skriver $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$, $z^6 = r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = r^6e^{6i\theta}$.
Ekvationen blir: $r^6e^{6i\theta} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Detta medför att

$$\begin{cases} r^6 = 1 \\ 6\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi\cdot k, \ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}k, \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}.$$

Rötterna till den givna ekvationen ges alltså av:

$$z_k = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}k)} = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}k) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}k), \quad k = 0,1,2,3,4,5.$$

Punkterna z_k ligger på enhetscirkeln i det komplexa talplanet, jämt fördelade på vinkelavståndet $\frac{\pi}{3}$, se figuren nedan.



Figur 1: ekvationens rötter

6. Visa att likheten

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\, 2^k = 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6$$

gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$. Låt P_n beteckna likheten ovan för $n = 1, 2, 3, \ldots$ låt P_n . Vi verifierar först att P_1 är sant. Vi har att

$$VL_1 = \sum_{k=1}^{1} k^2\, 2^k = 2 \quad \text{och} \quad HL_1 = 2^{1+1}(1^2 - 2 + 3) - 6 = 8 - 6 = 2.$$

P_1 är alltså sant. Antag nu att P_p är sant för något naturligt tal $p \geq 1$ dvs.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p} k^2\, 2^k}_{VL_p} = \underbrace{2^{p+1}(p^2 - 2p + 3) - 6}_{HL_p} \; (IA).$$

Vi vill visa att i så fall gäller att P_{p+1} är sant, dvs.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p+1} k^2\, 2^k}_{VL_{p+1}} = \underbrace{2^{p+2}((p+1)^2 - 2(p+1) + 3) - 6}_{HL_{p+1}} \; .$$

Vi har att

$$\begin{aligned} VL_{p+1} =& VL_p + (p+1)^2\, 2^{p+1} \overset{IA}{=} HL_p + (p+1)^2 2^{p+1} \\ =& 2^{p+1}(p^2 - 2p + 3) - 6 + (p+1)^2 2^{p+1} \\ =& 2^{p+1}(p^2 - 2p + 3 + p^2 + 2p + 1) - 6 = \\ =& 2^{p+1}(2p^2 + 4) - 6 = 2^{p+2}(p^2 + 2) - 6. \end{aligned}$$

Å andra sidan gäller att

$$HL_{p+1} = 2^{p+2}((p+1)^2 - 2(p+1) + 3) - 6 = 2^{p+2}(p^2 + 2p + 1 - 2p - 2 + 3) - 6 = 2^{p+2}(p^2 + 2) - 6.$$

Sålunda är $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ om P_p är sant. Detta tillsammans med det faktum att P_1 är sant medför enligt induktionsprincipen att P_n är sant för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.