MATA15 Algebra 1: delprov 2, 6 hp
Fredagen den 17:e maj 2013
Skrivtid: 8.00–13.00

LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Lösningsförslag

1. *Visa att vektorerna $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ och $u_3 = (2, 2, 1)$ bildar en bas för rummet och bestäm koordinaterna till vektorn $v = (5, 6, 2)$ i denna bas.*

Lösning: De givna vektorerna kan utgöra en bas för rummet om och endast om de är lineärt oberoende, dvs. de inte ligger i samma plan och deras volymprodukt och därmed determinant är skild från noll. Vi har att

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 1 = 4 \neq 0.$$

Vektorerna ovan är alltså lineärt oberoende och bildar en bas för rummet.
Koordinaterna x_1, x_2 och x_3 till vektorn v med avseende på basen u_1, u_2, u_3 ges av

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = v \iff x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 2, 1) + x_3(2, 2, 1) = (5, 6, 2)$$

vilket vi skriver som

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+2x_2} + 2x_3 = 5 \\ \phantom{x_1+{}} 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

Vi tillämpar Gausselimination. Vi adderar den första ekvationen till den tredje för att eliminera x_1 från den tredje ekvationen (och observerar att vi kan förenkla den andra ekvationen genom division med 2). Vi har alltså att:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5 \\ 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}.$$

Nu eliminerar vi x_2 från den tredje ekvationen genom att multiplicera den andra ekvationen med (-1) och addera till den sista. Systemet blir:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

Vektorn v har koordinaterna $(1, 1, 2)$ med avseende på basen u_1, u_2, u_3.
Svar: $u = (1, 1, 2)$ i basen u_1, u_2, u_3.

Var god vänd!

2. *Ange en ekvation på parameterform för planet M genom punkterna $(1,2,1)$, $(2,3,0)$ och $(1,6,4)$ och beräkna det minsta avståndet från punkten $(10,-3,0)$ till M. (Positivt orienterat ON-system).*

Lösning: För att ställa upp en ekvation på parameterform för ett plan behöver vi en punkt och två vektorer i planet. Sätt $P_1 = (1,2,1)$, $P_2 = (2,3,0)$ och $P_3 = (1,6,4)$. och bilda vektorerna $\overline{P_1P_2}$ och $\overline{P_1P_3}$. Vi har att

$$\overline{P_1P_2} = (2,3,0) - (1,2,1) = (1,1,-1)$$

och

$$\overline{P_1P_3} = (1,6,4) - (1,2,1) = (0,4,3).$$

En ekvation på parameterform för planet M ges av:

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s + 4t \\ z = 1 - s + 3t \end{cases} \quad s,\, t \in \mathbb{R}.$$

För att beräkna avståndet från punkten $P = (10,-3,0)$ till planet M härleder vi först ekvationen på normalform för M för att sedan använda avståndsformeln. För detta ändamål behöver vi en normalvektor till M. En sådan vektor ges av vektorprodukten mellan $\overline{P_1P_2}$ och $\overline{P_1P_3}$. Vi har att $(1,1,-1) \times (0,4,3) = (7,-3,4)$ och ekvationen på normalform för M ges av

$$7x - 3y + 4z = D$$

där $D = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 5$ fås utifrån att punkten $(1,2,1)$ tillhör M. Vi har alltså att ekvationen på normalform för M är

$$7x - 3y + 4z = 5,$$

och avståndet från punkten $(10,-3,0)$ till M ges av

$$d(P,M) = \frac{|7 \cdot 10 - 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{7^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{74}{\sqrt{74}} = \sqrt{74}.$$

Svar: En ekvation på parameterform för M: $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s + 4t \\ z = 1 - s + 3t \end{cases} \quad s,\, t \in \mathbb{R};$

$d(P,M) = \sqrt{74}$.

3. *Låt L vara skärningslinjen mellan planen*

$$2x + 2y + z = 3 \quad \textit{och} \quad 3x - y + z = -6$$

och M vara det plan genom origo som är vinkelrätt mot linjen $(x,y,z) = (1,2,2)t$, $t \in \mathbb{R}$. Ange en ekvation på parameterform för linjen L och visa att L skär planet M i en punkt. Ange även skärningspunkten. (ON-system).

Lösning: Vi börjar med att härleda en ekvation på parameterform för skärningslinjen

L mellan planen $2x + 2y + z = 3$ och $3x - y + z = -6$ genom att ställa upp och lösa ekvationssystemet bestående av de givna planens ekvationer:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x - y + z = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ x - 3y = -9 \end{cases}.$$

Här har vi subtraherat den första ekvationen från den andra för att eliminera z. Vi sätter $y = t$, $t \in \mathbb{R}$, löser ut x från den andra ekvationen och z från den första ekvationen och vi får en ekvation på parameterform för L:

$$\begin{cases} x = -9 + 3t \\ y = t \\ z = 21 - 8t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Planet M genom origo som är vinkelrätt mot linjen $(x, y, z) = (1, 2, 2)t$, $t \in \mathbb{R}$, har ekvationen

$$x + 2y + 2z = 0,$$

(eftersom vektorn $(1, 2, 2)$ är normal till M och punkten $(0, 0, 0)$ tillhör M).
För att bestämma eventuella skärningspunkter mellan L och M söker vi värden på parametern t för vilka en punkt (x, y, z) i L satisfierar M's ekvation:

$$-9 + 3t + 2t + 2(21 - 8t) = 0 \iff 11t = 33 \iff t = 3.$$

För $t = 3$ får vi skärningspunkten $(0, 3, -3)$.
(Anmärkning: skärningspunkten mellan L och M kan också fås som skärningspunkt mellan M och de två givna planen med skärningslinjen L.)

Svar: En ekvation på parameterform för L ges av $\begin{cases} x = -9 + 3t \\ y = t \\ z = 21 - 8t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R};$

L skär planet M i punkten $(0, 3, -3)$.

4. *Bestäm för varje värde på det reella talet a antalet lösningar till ekvationssystemet*

$$\begin{cases} (1 - 2a)x + (1 - a)y + z = 1 + a \\ x + y + (1 - a)z = 1 \\ (1 - a)x + (1 - a)y + z = 1 \end{cases}.$$

Lös ekvationssystemet fullständigt för de värden på a för vilka detta är möjligt.

Lösning: Vi använder Gausselimination. Det ser ut att vara lämpligt att först eliminera variabeln z från den andra och tredje ekvationen. För detta ändamål multiplicerar vi den första ekvationen med $-(1 - a)$ respektive med -1 och adderar den ledvis till den andra respektive den tredje ekvationen. Systemet blir:

$$\begin{cases} (1 - 2a)x + (1 - a)y + z = 1 + a \\ (1 - (1 - a)(1 - 2a))x + (1 - (1 - a)^2)y = 1 - (1 - a)(1 + a) \\ ax = -a \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (1 - 2a)x + (1 - a)y + z = 1 + a \\ (3a - 2a^2)x + (2a - a^2)y = a^2 \\ ax = -a \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - 2a)x + (1 - a)y + z = 1 + a \\ a(3 - 2a)x + a(2 - a)y = a^2 \\ ax = -a \end{cases}.$$

Var god vänd!

Eftersom den andra ekvationen endast innehåller variabeln x så är vi klara med eliminationen.

Vidare observerar vi att systemet har entydig lösning precis då både koefficienten framför x i den tredje ekvation och koefficienten framför y i den andra ekvationen är skilda från 0 (för i så fall kan man lösa ut x från den tredje ekvationen, sedan y från den andra och till sist z från den första ekvationen, på ett entydigt sätt).

Systemet har alltså entydig lösning om och endast om $a \neq 0$ och $2a - a^2 \neq 0$, dvs. för $a \neq 0, 2$. Lösningen ges av:

$$\begin{cases} z = 1 + a - (1-2a)x - (1-a)y \\ y = = (a^2 - a(3-2a)x)/(a(2-a)) \\ x = -1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{a^2+a(3-2a)}{a(2-a)} = \frac{3-a}{2-a} \\ z = 1 + a + 1 - 2a - (1-a)\frac{3-a}{2-a} = \frac{1}{2-a} \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

Det återstår att undersöka systemet för $a = 0$, $a = 2$.

För $a = 0$ är systemet ekvivalent med $x + y + z = 1$ och har oändligt många lösningar:

$$\begin{cases} x = 1 - s - t \\ y = s \qquad\qquad s, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

För $a = 2$ är systemet ekvivalent med

$$\begin{cases} -3x - y + z = 3 \\ -2x \qquad\quad = 4 \\ \ \ 2x \qquad\quad = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x - y + z = 3 \\ \quad x \qquad\quad = -2 \\ \quad x \qquad\quad = -1 \end{cases}$$

vilket är omöjligt. Systemet saknar lösningar.

Svar: Systemet har entydig lösning för $a \neq 0, 2$, saknar lösning för $a = 2$ och har oändligt många lösningar för $a = 0$.

5. *Låt $P = (1, 2, 3)$ och $Q = (3, 2, 1)$ vara två punkter i rummet (positivt ON-system).*

a) *Ange en ekvation på parameterform för en linje l_1 som är vinkelrät mot sträckan PQ och går genom mittpunkten på denna sträcka.*

b) *Bestäm en punkt R på linjen l_2 genom punkterna $(2, -2, 3)$ och $(11, 10, 9)$ sådan att triangeln PQR blir likbent med sidorna RP och RQ lika långa.*

c) *Beräkna arean av triangeln PQR.*

Lösning:

a). För att ange en ekvation på parameterform för en linje l_1 som är vinkelrät mot sträckan PQ och går genom mittpunkten på denna sträcka så väljer vi en vektor som är ortogonal mot $\overline{PQ}$ och beräknar koordinaterna för sträckans mittpunkt M. Vi har att

$$M = \frac{1}{2}((1, 2, 3) + (3, 2, 1)) = (2, 2, 2) \text{ och } \overline{PQ} = (3, 2, 1) - (1, 2, 3) = (2, 0, -2).$$

En vektor $u = (x, y, z) \neq \mathbf{0}$ som är ortogonal mot $\overline{PQ}$ uppfyller

$$(u|\overline{PQ}) = 0 \iff x - z = 0 \iff x = z.$$

Exempelvis uppfyller vektorn $(0, 1, 0)$ villkoret ovan. En ekvation på parameterform för en linje med de sökta egenskaperna ges av:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

b). Linjen l_2 genom punkterna $(2, -2, 3)$ och $(11, 10, 9)$ har en riktningsvektor v associerad till den riktade sträckan mellan de två givna punkterna:

$$v = (11, 10, 9) - (2, -2, 3) = (9, 12, 6) = 3(3, 4, 2).$$

Det är klart att vektorn $(3, 4, 2)$ också är en riktningsvektor för linjen l_2 och härmed ges en ekvation för l_2 av

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Nu ska vi bestämma t sådant att motsvarande punkt $R = (2 + 3t, -2 + 4t, 3 + 2t)$ på l_2 ska ligga på lika långt avstånd till punkterna P och Q, dvs $|\overline{QR}| = |\overline{QR}|$. Vi har att

$$\overline{PR} = (2 + 3t, -2 + 4t, 3 + 2t) - (1, 2, 3) = (1 + 3t, -4 + 4t, 2t)$$

$$\overline{QR} = (2 + 3t, -2 + 4t, 3 + 2t) - (3, 2, 1) = (-1 + 3t, -4 + 4t, 2 + 2t)$$

och härmed är

$$|\overline{QR}| = |\overline{QR}| \iff (1+3t)^2 + (-4+4t)^2 + (2t)^2 = (-1+3t)^2 + (-4+4t)^2 + (2+2t)^2$$

$$\iff 1 + 6t + 9t^2 + 4t^2 = 1 - 6t + 9t^2 + 4 + 8t + 4t^2 \iff t = 1.$$

För $t = 1$ får vi $R = (5, 2, 5)$.
c). Arean till triangeln $\triangle PQR$ ges av

$$\mathcal{A}(\triangle PQR) = \frac{1}{2}|\overline{PQ} \times \overline{PR}|.$$

Vi har att $\overline{PR} = (4, 0, 2)$ samt att $\overline{PQ} \times \overline{PR} = (2, 0, -2) \times (4, 0, 2) = (0, -12, 0)$ vilket ger att $\mathcal{A}(\triangle PQR) = \dfrac{|(0, -12, 0)|}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$.

Svar: **a)**. T.ex. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$,
b). $R = (5, 2, 5)$,
c). $\mathcal{A}(\triangle PQR) = 6$.

6. *Låt A, B och C vara följande matriser:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Var god vänd!

a) *Undersök huruvida matriserna A, B samt $A-B$ är inverterbara och ange i förekommande fall motsvarande invers.*

b) *Visa att $AB = BA$ samt att $(A+B)^n = A^n + B^n$ för varje naturligt tal $n \geq 1$.*

c) *Bestäm $(A+B)^n$ för varje $n = 2, 3, \ldots$*

d) *Lös matrisekvationen $AX - BX = C$.*

Lösning:
a). En kvadratisk matris är M är inverterbar om och endast om ekvationssystemet $MX = Y$ är lösbart för varje högerled Y.
Ekvationssystemet $AX = Y$ ges av:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \quad y_1 \\ \qquad\qquad 0 = y_2 - y_1 \\ \qquad\qquad 0 = y_3 - y_1 \end{cases}.$$

Systemet ovan har inte entydig lösning för varje högerled Y (det saknar lösningar om $y_1 \neq y_2$, $y_1 \neq y_3$ eller $y_2 \neq y_3$ och det har oändligt många lösningar då $y_1 = y_2 = y_3$) vilket medför att matrisen A inte är inverterbar.
Vi sätter upp ekvationssystemet $BX = Y$ och använder Gausselimination:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = \quad y_1 \\ 3x_1 - 3x_2 \qquad = y_2 - y_1 \\ -3x_1 + 3x_2 \qquad = y_3 + 2y_1 \end{cases} \text{(eliminerar } x_3\text{)}$$

$$\iff \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = \qquad y_1 \\ 3x_1 - 3x_2 \qquad = \quad y_2 - y_1 \\ \qquad\qquad 0 = y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}.$$

Även det här systemet saknar entydig lösning för varje högerled Y (det saknar lösningar om $y_1 + y_2 + y_3 \neq 0$ och det har oändligt många lösningar då $y_1 + y_2 + y_3 = 0$) vilket medför att matrisen B inte är inverterbar heller.
Slutligen har vi att

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3E,$$

vilket medför att $A - B$ är inverterbar med inversen $(A-B)^{-1} = (3E)^{-1} = \frac{1}{3}E$ (eftersom $E^{-1} = E$).
b).Vi beräknar produkterna AB och BA och finner att $AB = BA = 0$. Slutsatsen $(A+B)^n = A^n + B^n$ är en direkt följd av detta samband kombinerat med binomialsatsen (vilken kan användas i det här fallet ty $AB = BA$): $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$. (Alla termer i summan som innehåller produkten AB blir lika med nollmatrisen.)
c). Vi har att

$$(A+B) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad (A+B)^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = 3^2 E.$$

Detta medför att $(A+B)^3 = 3^2(A+B)$, $A^4 = ((A+B)^2)^2 = (3^2E)^2 = 3^4E$, osv.
Vi har alltså att $(A+B)^n = 3^nE$ om n är jämnt och $(A+B)^n = 3^{n-1}(A+B)$ om n är udda: för jämna n, dvs. $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, så är

$$(A+B)^n = (A+B)^{2k} = ((A+B)^2)^k = (3^2E)^k = 3^{2k}E = 3^nE$$

medan för udda n, dvs. $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ är

$$(A+B)^n = (A+B)^{2k+1} = (A+B)^{2k} \cdot (A+B) = 3^{2k}E \cdot (A+B) = 3^{n-1}(A+B).$$

d). Matrisekvationen $AX - BX = C$ är ekvivalent med

$$(A-B)X = C \iff 3EX = C \iff X = \frac{1}{3}C \iff X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Svar: **a)**. A och B är ej inverterbara, $A - B$ är inverterbar med inversen $\frac{1}{3}E$.
b). $AB = BA = 0$
c). $(A+B)^n = 3^nE$ då n är jämnt; $(A+B)^n = 3^{n-1}(A+B)$, då n är udda.
d). $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$