LUNDS UNIVERSITET

Tentamenskrivning
MATA15 Algebra: delprov 1, 6hp
Tisdagen den 2:a april 2013

Matematikcentrum
Matematik NF

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Avgör om följande diofantiska ekvationer är lösbara och ange i förekommande fall samtliga lösningar:

a) $72x + 27y = 272$ **b)** $27x - 72y = 2772$.

Lösning:
a) Vi har att $72 = 8 \cdot 9$ och $27 = 3 \cdot 9$ vilket medför att $SGD(72, 27) = 9$. Ekvationen $72x + 27y = 272$ saknar heltalslösningar eftersom $SGD(72, 27)$ inte delar ekvationens högerled.
b) Ekvationen $27x - 72y = 2772$ är lösbar eftersom $SGD(27, 72) = 9|2772$. Vi dividerar både vänster och högerledet i den givna ekvationen med 9 och får den ekvivalenta ekvationen

$$3x - 8y = 308. \quad (*)$$

Det är lätt att se att $x_1 = 100$ och $y_1 = -1$ utgör en partikulär lösning till ekvationen, dvs.

$$3 \cdot 100 - 8 \cdot (-1) = 308. \quad (**).$$

Om vi bildar differensen mellan $(*)$ och $(**)$ får vi att

$$3(x - 100) - 8(y + 1) = 0 \iff 3(x - 100) = 8(y + 1).$$

Eftersom $SGD(3, 8) = 1$ får vi att $3|(y + 1)$ och $8|(x - 100)$ och härmed är

$$\begin{cases} x = 100 + 8n \\ y = -1 + 3n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

samtliga lösningar till den givna diofantiska ekvationen.
(Alternativt kan man bestämma en partikulär lösning till $(*)$ genom att först söka en partikulär lösning till den diofantiska hjälpekvationen

$$3x - 8y = 1$$

med hjälp av Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 8 &= 3 \cdot 2 + 2 \\ 3 &= 2 \cdot 1 + 1 \end{aligned}$$

Var god vänd!

vilket ger

$$\begin{aligned}1 =&3-2\\ =&3-(8-3\cdot 2)=3-8+3\cdot 2=3\cdot 3-8\\ =&3\cdot 3-8\cdot 1\end{aligned}$$

Detta ger att $x_0 = 3$ och $y_0 = 1$ utgör en lösning till hjälpekvationen och härmed är $x_1 = 308 \cdot 3 = 924$ och $y_1 = 308 \cdot 1 = 308$, en lösning till ekvationen $(*)$. Enligt lösningsformeln för en diofantisk ekvation ges samtliga lösningar till $(*)$ av

$$\begin{cases} x = 924 + 8n \\ y = 308 + 3n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Klart att de till synes olika svaren ger samma heltalslösningar till ekvationen.)

Svar:

a) Ekvationen saknar lösningar.

b) $x = 100 + 8n,\ y = -1 + 3n,\ \ n \in \mathbb{Z}$.

2. Lös följande olikheter:

a) $|x^2 - 1| + 2x < 2$, **b)** $\dfrac{2x-3}{x-1} \geq \dfrac{3x-2}{x+1}$.

Lösning:

a). Vi har att

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & \text{om } x^2-1 \geq 0, \text{ dvs. om } x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \\ -x^2+1, & \text{om } x^2-1 < 0, \text{ dvs. om } x \in (-1,1) \end{cases}.$$

Detta ger upphov till följande två fall:

Fall 1: för $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ är olikheten ekvivalent med

$$x^2 - 1 + 2x < 2 \iff x^2 + 2x - 3 < 0 \iff (x-1)(x+3) < 0$$

Teckenstudium visar att denna olikhet är satisfierad för $x \in (-3, 1)$. I detta fall är olikheten satisfierad för alla $x \in ((-\infty, -1] \cup [1, \infty)) \cap (-3, 1) = (-3, -1]$.

Fall 2: för $x \in (-1, 1)$ är olikheten ekvivalent med

$$-x^2 + 1 + 2x > 2 \iff x^2 - 2x + 1 > 0 \iff (x-1)^2 > 0 \iff x \neq 1.$$

Detta visar att i detta fall är olikheten satisfierad för alla $x \in (-1, 1)$.

Den ursprungliga olikheten gäller för alla x som satisfierar *fall 1* eller *fall 2*, dvs $x \in (-3, -1] \cup (-1, 1) = (-3, 1)$.

a). Den givna olikheten är ekvivalent med:

$$\frac{2x-3}{x-1} - \frac{3x-2}{x+1} \geq 0 \iff \frac{(2x-3)(x+1)-(3x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \iff$$

$$\frac{2x^2-x-3-(3x^2-5x+2)}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \iff \frac{-x^2+4x-5}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \iff \frac{x^2-4x+5}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

$$\iff \frac{(x-2)^2+1}{(x-1)(x+1)} \leq 0.$$

I det sista steget har vi kvadratkompletterat täljaren. Observera att uttrycket i täljaren är positivt för alla reella x. Vi utför nu ett teckenstudium av vänsterledet:

x		-1		1	
$((x-2)^2+1)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{((x-2)^2+1)}{(x-1)(x+1)}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

Olikheten är uppfylld för $x \in (-1, 1)$.

Svar:
a)$(-3, 1)$, **b)**$(-1, 1)$.

3. Betrakta polynomet

$$f(x) = x^4 - 4x + 3.$$

a) Bestäm $SGD(f, f')$ så när som på associerade polynom.
b) Använd (a) för att lösa ekvationen $f(x) = 0$.
Lösning:
a) Vi har att $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$. Vi har att $SGD(f, f') = SGD(f, x^3 - 1)$ så när som på associerade polynom. Vi använder Euklides algoritm. Vi dividerar först f med $x^3 - 1$ och får kvoten x och resten $r(x) = -3x + 3 = -3(x - 1)$:

$$\begin{array}{l} \big(\ \ x^4 - 4x + 3\big) \,/\, \big(x^3 - 1\big) = x + \dfrac{-3x+3}{x^3-1} \\ \underline{-x^4 \ \ + x} \\ \quad\ \ - 3x \end{array}$$

Vi har att $SGD(f, f') = SGD(f, x^3 - 1) = SGD(x^3 - 1, r) = SGD(x^3 - 1, x - 1)$. Vi dividerar nu $x^3 - 1$ med $x - 1$ och får kvoten $x^2 + x + 1$ och resten 0:

$$\begin{array}{rl} \big(\ x^3 \qquad\quad - 1\big) \,/\, \big(x - 1\big) = x^2 + x + 1 & \\ \underline{-x^3 + x^2} & \\ x^2 & \\ \underline{-x^2 + x} & \\ x - 1 & \\ \underline{-x + 1} & \\ 0 & \end{array}$$

Detta visar att $SGD(f, f') = x - 1$ så när som på associerade polynom.

b) Beräkningarna ovan innebär att $x = 1$ är ett nollställe till både f och f' vilket i sin tur medför att $x = 1$ är ett nollställe av multiplicitet 2 till f. Enligt faktorsatsen följer att $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ är en delare till f. Vi utför divisionen mellan f och $x^2 - 2x + 1$:

$$\begin{array}{rl} \big(\ x^4 \qquad\qquad - 4x + 3\big) \,/\, \big(x^2 - 2x + 1\big) = x^2 + 2x + 3 & \\ \underline{-x^4 + 2x^3 - x^2} & \\ 2x^3 - x^2 - 4x & \\ \underline{-2x^3 + 4x^2 - 2x} & \\ 3x^2 - 6x + 3 & \\ \underline{-3x^2 + 6x - 3} & \\ 0 & \end{array}$$

Var god vänd!

dvs $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 3)$. Vi har att

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \iff x = -1 \pm i\sqrt{2},$$

så ekvationen $f(x) = 0$ har nollställena 1 av multiplicitet 2 samt $-1 + i\sqrt{2}$ och $-1 - i\sqrt{2}$.

Svar:
a) $SGD(f, f') = x - 1$
b) 1 av multiplicitet 2, $-1 + i\sqrt{2}$ och $-1 - i\sqrt{2}$.

4. Visa att ekvationen

$$z^3 - (10 - 5i)z^2 + (25 - 38i)z + 65i = 0$$

har en reell rot och lös sedan ekvationen fullständigt.

Lösning: Om $z = a$, $a \in \mathbb{R}$, är en rot till den givna ekvationen då gäller att

$$a^3 - (10 - 5i)a^2 + (25 - 38i)a + 65i = 0 \iff$$

$$(a^3 - 10a^2 + 25a) + i(5a^2 - 38a + 65) = 0.$$

Likheten ovan gäller om och endast om både real- och imaginärdelen av uttrycket i vänsterledet är lika med 0, dvs

$$a^3 - 10a^2 + 25a = 0 \quad \text{och} \quad 5a^2 - 38a + 65 = 0.$$

Den första ekvationen är ekvivalent med $a(a^2 - 10a + 25) = 0$ och den har rötterna $a = 0$ och $a = 5$, den sista dubbelrot. Insättning i den andra ekvationen visar att endast $a = 5$ satisfierar båda ekvationerna.
Detta ger att $z = 5$ är en reell rot till den ursprungliga ekvationen och härmed är $z - 5$ en delare till polynomet $p(z) = z^3 - (10 - 5i)z^2 + (25 - 38i)z + 65i$. Vi utför polynomdivisionen mellan $p(z)$ och $z - 5$ och får kvoten

$$q(z) = z^2 - (5 - 5i)z - 13i.$$

Ekvationens övriga rötter satisfierar $q(z) = 0$. Vi löser denna andragradsekvation med komplexa koefficienter med känd lösningsmetod. Först kvadratkompletterar vi uttrycket i vänsterledet:
Kvadratkomplettering ger:

$$z^2 - 2\left(\frac{5(1-i)}{2}\right)z + \left(\frac{5(1-i)}{2}\right)^2 = \left(\frac{5(1-i)}{2}\right)^2 + 13i$$

$$\iff \left(z - \frac{5(1-i)}{2}\right)^2 = \frac{25(1-i)^2}{4} + 13i \iff \left(z - \frac{5(1-i)}{2}\right)^2 = -\frac{25i}{2} + 13i$$

Vi sätter nu $w = z - \dfrac{5(1-i)}{2}$ och skriver $w = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$. Ekvationen ovan blir:

$$(x + iy)^2 = \frac{1}{2}i. \quad (*)$$

Identifiering av real- och imaginärdelar av vänster- och högerled ger:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (\text{Re } w^2 = \text{Re } (\tfrac{1}{2}i) \\ 2xy = \tfrac{1}{2} & (\text{Im } w^2 = \text{Im } (\tfrac{1}{2}i) \end{cases}.$$

Den första ekvationen ger att $x^2 = y^2$, dvs. $x = \pm y$ men från den andra ekvationen kan vi dra slutsatsen att x och y har samma tecken (ty produkten xy är positiv). Vi har alltså att $x = y$ och insättning i den andra ekvationen ger $x^2 = \frac{1}{4}$, dvs. $x = \pm\frac{1}{2}$. Vi får två lösningar till ekvationen $(*)$, nämligen:

$$w_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ och } w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Ur sambandet $w = z - \dfrac{5(1-i)}{2}$ dvs. $z = w + \dfrac{5(1-i)}{2}$ får vi lösningarna till ekvationen $q(z) = 0$

$$z_1 = w_1 + \frac{5(1-i)}{2} = 3 - 2i \text{ och } z_2 = w_2 + \frac{5(1-i)}{2} = 2 - 3i.$$

Svar: Ekvationen har rötterna 5, $3 - 2i$ och $2 - 3i$.

5. Lös ekvationen

$$z^6 + 6iz^5 - 15z^4 - 20iz^3 + 15z^2 + 6iz - 1 = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{1+i}\right)^{12}.$$

Ange rötterna på formen $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ och skissa dem i det komplexa talplanet.

Lösning: Vi börjar med att observera att ekvationen är ekvivalent med

$$(z+i)^6 = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{1+i}\right)^{12}$$

(använd t.ex. binomialsatsen). Sedan förenklar vi högerledet. Vi har att $|\sqrt{2} + \sqrt{6}i| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ och vi skriver

$$\sqrt{2} + \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Vi har också att

$$|1+i| = \sqrt{2},\ \ 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Detta ger

$$\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{1+i}\right)^{12} = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^{12} = \left(2e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})}\right)^{12} = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{12} = 2^{12}e^{i\pi}.$$

Den givna ekvationen kan skrivas som

$$(z+i)^6 = 2^{12}e^{i\pi}.$$

Var god vänd!

Vi ansätter $z+i=w$ och följer den kända lösningsmetoden för binomiska ekvationer. Vi skriver $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$ och enligt De Moivres formel gäller att

$$w^6=r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=r^6e^{6i\theta}.$$

Ekvationen blir:

$$r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=2^{12}(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Detta medför att

$$\begin{cases} r^6=2^{12} \\ 6\theta=\pi+2\pi\cdot k,\ \ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r=2^2 \\ \theta=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k,\ \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}.$$

Lösningarna till ekvationen $w^6=2^{12}e^{i\pi}$ fås för $k=0,1,2,3,4,5$:

$$w_k=4(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k)+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k)),$$

dvs.,

$$w_0=4(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6}))=4(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=2\sqrt{3}+2i,$$
$$w_1=4(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}))=4(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}))=4i$$
$$w_2=4(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}))=4(\cos(\frac{5\pi}{6})+i\sin(\frac{5\pi}{6}))=-2\sqrt{3}+2i$$
$$w_3=4(\cos(\frac{\pi}{6}+\pi)+i\sin(\frac{\pi}{6}+\pi))=4(\cos(\frac{7\pi}{6})+i\sin(\frac{7\pi}{6}))=-2\sqrt{3}-2i,$$
$$w_4=4(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}))=4(\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2}))=-4i,$$
$$w_5=4(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{3}))=4(\cos(\frac{11\pi}{6})+i\sin(\frac{11\pi}{6}))=2\sqrt{3}-2i,$$

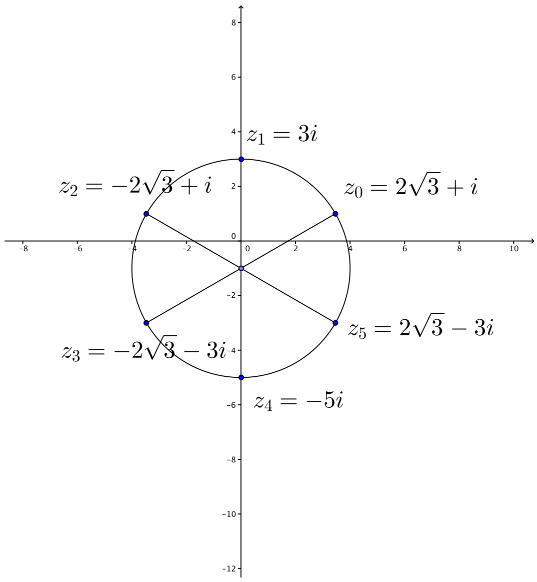
och härmed ges rötterna till den ursprungliga ekvationen av:

$$z_k=w_k-i \text{ för } k=0,1,2,3,4,5,$$

dvs:

$$z_0=2\sqrt{3}+i,\qquad z_1=3i,\qquad z_2=-2\sqrt{3}+i,$$
$$z_3=-2\sqrt{3}-3i,\qquad z_4=-5i,\qquad z_5=2\sqrt{3}-3i.$$

Punkterna z_k ligger på en cirkel med centrum i punkten $-i$ och radie 4 i det komplexa talplanet, jämt fördelade på vinkelavståndet $\frac{\pi}{3}$, se figuren på nästa sida.



Figur 1: ekvationens rötter

Svar: Ekvationen har rötterna $2\sqrt{3} + i$, $3i$, $-2\sqrt{3} + i$, $-2\sqrt{3} - 3i$, $-5i$, $2\sqrt{3} - 3i$.

6. Visa att likheten

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}$$

gäller för alla naturliga tal $n \geq 2$.

Lösning:
För $n = 1, 2, 3, \ldots$ låt P_n beteckna likheten ovan. Vi verifierar först att P_2 är sant. Vi har att

$$VL_2 = \prod_{k=2}^{2} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} = \frac{7}{9} \quad \text{och} \quad HL_2 = \frac{2(2^2 + 2 + 1)}{3 \cdot 2(2+1)} = \frac{7}{9}.$$

P_2 är alltså sant.
Antag nu att P_p är sant för något naturligt tal $p \geq 2$ dvs.

$$\underbrace{\prod_{k=2}^{p} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}}_{VL_p} = \underbrace{\frac{2(p^2 + p + 1)}{3p(p+1)}}_{HL_p} \; (IA).$$

Vi visar att i så fall gäller att P_{p+1} är sant, dvs.

$$\underbrace{\prod_{k=2}^{p+1} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}}_{VL_{p+1}} = \underbrace{\frac{2((p+1)^2 + (p+1) + 1)}{3(p+1)(p+2)}}_{HL_{p+1}} \quad .$$

Vi har att

$$\begin{aligned} VL_{p+1} =& VL_p \cdot \frac{(p+1)^3 - 1}{(p+1)^3 + 1} \overset{IA}{=} HL_p \cdot \frac{(p+1)^3 - 1}{(p+1)^3 + 1} \\ =& \frac{2(p^2 + p + 1)}{3p(p+1)} \cdot \frac{(p+1)^3 - 1}{(p+1)^3 + 1} \end{aligned}$$

Var god vänd!

Det återstår att visa att uttrycket ovan är lika med HL_{p+1}, dvs att

$$\frac{2(p^2+p+1)}{3p(p+1)} \cdot \frac{(p+1)^3-1}{(p+1)^3+1} = \frac{2((p+1)^2+(p+1)+1)}{3(p+1)(p+2)}.$$

Likheten ovan är ekvivalent med

$$\frac{(p^2+p+1)}{p} \cdot \frac{(p+1)^3-1}{(p+1)^3+1} = \frac{((p+1)^2+(p+1)+1)}{(p+2)} \iff$$

$$\frac{(p^2+p+1)(p^3+3p^2+3p)}{p(p^3+3p^2+3p+2)} = \frac{(p^2+2p+1+p+2)}{(p+2)} \iff$$

$$\frac{(p^2+p+1)(p(p^2+3p+3))}{p(p^3+3p^2+3p+2)} = \frac{(p^2+3p+3)}{(p+2)} \iff \frac{(p^2+p+1)}{(p^3+3p^2+3p+2)} = \frac{1}{(p+2)}$$

$$\iff (p^2+p+1)(p+2) = p^3+3p^2+3p+2,$$

vilket är sant.
(Observera att för $p \geq 2$ är alla de ingående faktorerna strängt positiva och härmed är alla de förenklingar som har gjorts och som har inneburit division eller multiplikation i båda leden med ett uttryck beroende på p fullt tillåtna. Det finns såklart elegantare sätt att visa likheten ovan. Man kan till exempel använda likheterna $p^3 \pm 1 = (p \pm 1)(p^2 \mp p + 1)$.)

Sålunda är P_{p+1} sant om P_p är sant. Detta tillsammans med det faktum att P_2 är sant medför enligt induktionsprincipen att P_n är sant för alla $n = 2, 3, \ldots$.