LUNDS UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Algebra 1, Delprov 1
Lördag 21 mars 2015
kl. 14.00–19.00

Matematikcentrum
Matematik NF

För att deltaga i examinationen krävs det att man är registrerad eller omregistrerad på kursen. Inga hjälpmedel tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar.

1. Bestäm samtliga heltal a sådana att talet $13a - 100$ är delbart med 17.

2. Lös olikheten
$$|x^2 - |x^2 - 1| + 3| < 3.$$

3. Visa att $z = 3i$ är en dubbelrot till ekvationen
$$z^4 - (4+5i)z^3 + (2+25i)z^2 + (42-39i)z - (45+9i) = 0$$
och lös ekvationen fullständigt.

4. **a)** Hur många delmängder med fyra element till mängden
$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
innehåller elementet 1?

b) Visa att för varje naturligt tal n gäller att
$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} = 2\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\right).$$

5. Låt z_1 och z_2 vara rötterna till ekvationen $z^2 + 2 - 2\sqrt{3}i = 0$ och antag att $\operatorname{Re} z_1 > \operatorname{Re} z_2$. Låt M vara mängden
$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \leq |z - z_2|, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

a) Skriv z_1 och z_2 på polär form.

b) Skissa mängden M i det komplexa talplanet och ange vilka värden $\arg z$ antar då $z \in M$.

6. Betrakta talföljderna a_n och b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, som ges av
$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{5a_n + 3}{a_n + 3} \qquad \text{och} \qquad b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}.$$

a) Visa att följden b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, är geometrisk.

b) Härled en sluten formel för följden a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.