LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Tentamensskrivning
Algebra 1, del 2
Måndag 12 januari 2015
kl. 08.00–13.00

För att deltaga i examinationen krävs det att man är registrerad eller omregistrerad på kursen. Inga hjälpmedel tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar.

1. Visa att vektorerna $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ och $u_3 = (0,1,0)$ bildar en *ortonormerad* bas i det tredimensionella rummet. Bestäm koordinaterna för vektorn $v = (3,3,1)$ med avseende på denna bas. (ON-system.)

2. Låt ℓ vara linjen genom punkterna $P_1 = (2,4,-5)$ och $P_2 = (5,2,-5)$ och låt M vara det plan som är parallellt med ℓ och som går genom punkterna $P_3 = (0,1,-1)$ och $P_4 = (2,1,0)$. (ON-system.)

a) Ange en ekvation på normalform för planet M.

b) Visa att triangeln $P_1P_2P_3$ är rätvinklig.

3. Ange den punkt på sfären $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 9$ som ligger närmast punkten $P = (7,-1,-3)$. Beräkna det kortaste avståndet mellan P och sfären S. (ON-system.)

4. Betrakta matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Beräkna inversen till matrisen $C = A + E$, där E betecknar enhetsmatrisen.

b) Lös matrisekvationen $AX + X = B$.

5. Betrakta planen med ekvationerna

$$x + 2y + 2z + 3 = 0, \qquad x - 2y + 2z - 1 = 0 \qquad \text{och} \qquad 2x + y + 2z + 1 = 0.$$

(ON-system.)

a) Visa att planen skär varandra i en punkt och ange skärningspunkten.

b) Visa att punkten $(1,-1,7)$ ligger på lika långt avstånd till de givna planen.

c) Ange någon linje ℓ sådan att varje punkt på ℓ ligger på lika långt avstånd till de givna planen.

6. Låt A vara tyngdpunkten på sidan PQR i tetraedern $OPQR$. Låt vidare B, C och D vara mittpunkterna på kanterna OP, OQ respektive OR. Bestäm volymen av tetraedern $ABCD$ i förhållande till volymen av tetraedern $OPQR$.