LUNDS UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Algebra 1, del 2
Måndag 8 december 2014
kl. 08.00–13.00

Matematikcentrum
Matematik NF

För att deltaga i examinationen krävs det att man är registrerad eller omregistrerad på kursen. Inga hjälpmedel tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar.

1. Visa att vektorerna $e_1 = (1,1,2)$, $e_2 = (1,2,3)$ och $e_3 = (2,1,2)$ bildar en bas i det tredimensionella rummet. Bestäm koordinaterna för vektorn $u = (2,3,4)$ med avseende på denna bas.

2. Linjen genom punkten $P = (3,4,3)$ med riktningsvektor $(1,1,1)$ och linjen genom punkten $Q = (4,8,10)$ med riktningsvektor $(1,2,3)$ skär varandra i en punkt R. (Positivt ON-system.)

a) Bestäm punkten R.

b) Beräkna arean av triangeln PQR.

3. Visa att matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

är inverterbar och bestäm dess invers A^{-1}.

4. Ett plan parallellt med linjen $(x,y,z) = (1,3,7) + t(1,2,-1)$ går genom punkterna $(1,1,1)$ och $(1,-2,2)$. (ON-system.)

a) Ange en ekvation på formen $Ax + By + Cz + D = 0$ för planet.

b) Beräkna det minsta avståndet från punkten $P = (5,2,3)$ till planet.

c) Bestäm den punkt i planet som ligger närmast P.

5. En tetraeder har hörn i punkterna

$$P = (-1,1,-2), \quad Q = (3,-1,2), \quad R = (6,-1,-1), \quad S = (3,2,-1)$$

varav de första tre ligger i planet $x + 4y + z = 1$. (Positivt ON-system.)

a) Beräkna vinkeln mellan sidan PQR och kanten PS.

b) Beräkna vinkeln mellan sidorna PQR och PQS.

c) Beräkna tetraederns volym.

6. Låt C vara skärningscirkeln mellan planet $2x + y + 2z = 2$ och sfären

$$(x+5)^2 + (y+5)^2 + (z+5)^2 = 225,$$

och låt M vara planet $23x + 19y + 8z = 386$. Bestäm de punkter på C som har minst respektive störst avstånd till planet M. (ON-system.)