LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Tentamensskrivning
Algebra 1, Delprov 1
Lördag 15 november 2014
kl. 08.00–13.00

För att deltaga i examinationen krävs det att man är registrerad eller omregistrerad på kursen. Inga hjälpmedel tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar.

1. Lös olikheten

$$\frac{|x-1|+2|1-x|}{3} > \frac{8}{x+1}.$$

2. Rita i det komplexa talplanet mängden M av alla komplexa tal z som uppfyller

$$\left|z-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right| \leq 1 \quad \text{och} \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

Ange särskilt det största värde som absolutbeloppet av z antar då $z \in M$.

3. **a)** Bestäm koefficienten för x^3 i utvecklingen av

$$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[5]{x}}\right)^{17}.$$

b) Hur många sjusiffriga tal har exakt tre 1:or, två 2:or och två 0:or?

4. Ekvationen

$$z^3-(2+5i)z^2-(1-5i)z-(18+30i)=0$$

har en rent imaginär rot. Lös ekvationen fullständigt.

5. Följden a_n, $n=1,2,\ldots$, ges av rekursionsformeln

$$a_1=\frac{1}{4}, \qquad a_n=a_{n-1}+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, \quad n \geq 2.$$

Ange en sluten formel för a_n, $n=1,2,\ldots$, och bevisa denna med hjälp av induktion.

6. Låt a, b och c vara positiva heltal sådana att $SGD(a,b)=1$ och betrakta ekvationen

$$ax+by=c.$$

a) Visa att om $c=ab-a-b$ så saknar ekvationen lösningar (x,y) där x och y är naturliga tal.

b) Visa att ekvationen har lösningar (x,y), x, $y \in \mathbb{N}$ om $c > ab-a-b$.