LUNDS UNIVERSITET

Tentamenskrivning
MATA15 Algebra 1: delprov 2, 6hp
Fredagen den 16 maj 2014
Skrivtid: 8.00–13.00

Matematikcentrum
Matematik NF

Inga hjälpmedel tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar.

1. Låt ℓ vara linjen genom punkten $(5,4,4)$ som är vinkelrät mot planet $2x+2y+3z=7$. Bestäm det kortaste avståndet från punkten $P=(1,1,3)$ till linjen ℓ och ange speciellt den punkt på ℓ som ligger närmast P. (Ortonormerat koordinatsystem förutsätts.)

2. Ange en *positivt orienterad ortonormerad bas* e_1, e_2, e_3 sådan att vektorn e_1 är parallell med linjen $(x,y,z)=(1+t,7,1-t)$ och båda vektorerna e_1 och e_2 är parallella med planet $x-2y+z=3$. På hur många sätt kan en sådan bas väljas?

3. Lös det lineära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = a+1 \\ (a+1)x + ay + z = a+1 \\ ax + (a-1)y + (a-2)z = 2a-2 \end{cases}$$

för alla värden på det reella talet a för vilka detta är möjligt.

4. Låt M vara planet genom punkterna $(1,4,0)$, $(2,2,0)$ och $(0,2,-2)$. Sfären med centrum i punkten $(1,1,3)$ och radie 5 skär planet M utmed en cirkel.

a) Bestäm ekvationen på normalform till planet M.

b) Beräkna det kortaste avståndet från sfärens medelpunkt till M.

c) Bestäm skärningscirkelns medelpunkt och radie. (Positivt ON-system)

5. Låt $P=(2,-1,0)$, $Q=(0,-1,0)$ och låt R vara en punkt i xz-planet som ligger på avstånd $\sqrt{3}$ till var och en och punkterna P och Q. Låt ℓ vara linjen genom punkten P som är vinkelrät mot planet genom P, Q och R. Bestäm alla punkter $S \in \ell$ sådan att tetraedern $PQRS$ har volymen $\frac{4}{3}$. (Positivt ON-system)

6. Betrakta 3×3 matrisen

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

a) Beräkna inversen A^{-1} till A.

b) Visa att $A^3-A=A^2-E$. (E betecknar enhetsmatrisen.)

c) Ange A^n-A^{n-2} för alla naturliga tal $n\geq 3$.