LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Tentamenskrivning
MATA15 Algebra 1: delprov 2, 6 hp
Fredagen den 17:e maj 2013
Skrivtid: 8.00–13.00

Inga hjälpmedel tillåtna. Använd institutionens papper och skriv bara på den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar och rita gärna en figur i förekommande fall.

1. Visa att vektorerna $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ och $u_3 = (2, 2, 1)$ bildar en bas för rummet och bestäm koordinaterna till vektorn $v = (5, 6, 2)$ i denna bas.

2. Ange en ekvation på parameterform för planet M genom punkterna $(1, 2, 1)$, $(2, 3, 0)$ och $(1, 6, 4)$ och beräkna det minsta avståndet från punkten $(10, -3, 0)$ till M. (Positivt orienterat ON-system).

3. Låt L vara skärningslinjen mellan planen

$$2x + 2y + z = 3 \quad \text{och} \quad 3x - y + z = -6$$

och M vara det plan genom origo som är vinkelrätt mot linjen $(x, y, z) = (1, 2, 2)t$, $t \in \mathbb{R}$. Ange en ekvation på parameterform för linjen L och visa att L skär planet M i en punkt. Ange även skärningspunkten. (ON-system).

4. Bestäm för varje värde på det reella talet a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} (1-2a)x + (1-a)y + z = 1 + a \\ x + y + (1-a)z = 1 \\ (1-a)x + (1-a)y + z = 1 \end{cases}.$$

Lös ekvationssystemet fullständigt för de värden på a för vilka detta är möjligt.

5. Låt $P = (1, 2, 3)$ och $Q = (3, 2, 1)$ vara två punkter i rummet (positivt ON-system).

a) Ange en ekvation på parameterform för en linje l_1 som är vinkelrät mot sträckan PQ och går genom mittpunkten på denna sträcka.

b) Bestäm en punkt R på linjen l_2 genom punkterna $(2, -2, 3)$ och $(11, 10, 9)$ sådan att triangeln PQR blir likbent med sidorna RP och RQ lika långa.

c) Beräkna arean av triangeln PQR.

6. Låt A, B och C vara följande matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

a) Undersök huruvida matriserna A, B samt $A - B$ är inverterbara och ange i förekommande fall motsvarande invers.

b) Visa att $AB = BA$ samt att $(A + B)^n = A^n + B^n$ för varje naturligt tal $n \geq 1$.

c) Bestäm $(A + B)^n$ för varje $n = 2, 3, \ldots$

d) Lös matrisekvationen $AX - BX = C$.