LUND UNIVERSITY

Centre for Mathematical Sciences
*Mathematics, Faculty of Science*

**Written Examination**
**Linear Algebra 2**
**Tuesday, 22 August 2017**
**Duration: 08:00–13:00**

**Turn the page for the Swedish text.**

***No aids except writing utensils.*** *The result will be announced on the noticeboard in the entrance hall no later than 13:00 on Thursday, 24 August. Candidates can view their marked scripts from 13:15 to 14:00 on the same day.*

**1.** Find the vector $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$ that minimises $\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**2.** Solve the recurrence problem

$$\begin{cases} a_{n+1} = \phantom{3}a_n + 3b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 4b_n + 3c_n \\ c_{n+1} = 2a_n + 3b_n + \phantom{2}c_n \end{cases}, \quad \begin{cases} a_0 = 8 \\ b_0 = 3 \\ c_0 = 12 \end{cases}.$$

**3.** A surface has, with respect to an orthonormal coordinate system for 3-space, the equation

$$2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 10x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3 = 1.$$

Identify its type and specify the points on the surface closest to the origin.

**4.** The linear transformations $F$, $G$ and $H$ on a three-dimensional inner product space $V$ are represented by the matrices

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & -6 & -4 \\ 4 & 9 & 8 \\ -2 & -6 & -7 \end{bmatrix},$$

respectively, with respect to an orthonormal basis for $V$. Which of them are orthogonal reflections in some subspace $U$ of $V$? For those that are, specify $U$.

**5.** State and prove the rank-nullity theorem.

**6.** Show that if $A$ is a non-zero diagonalisable square matrix, then $A^n \neq 0$ for all positive integers $n$.

**Tentamensskrivning**
**Lineär algebra 2**
**Tisdag den 22 augusti 2017**
**Skrivtid: 08.00–13.00**

Matematikcentrum
*Matematik NF*

**Turn the page for the English text.**

***Inga hjälpmedel förutom skrivdon.*** *Resultatet kommer att kungöras på anslagstavlan i entréhallen senast kl. 13.00 på torsdag den 24 augusti. Skrivningarna visas från 13.15 till 14.00 samma dag.*

**1.** Bestäm den vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$, som minimerar $\|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$, där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**2.** Lös rekursionsproblemet

$$\begin{cases} a_{n+1} = \phantom{3}a_n + 3b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 4b_n + 3c_n \\ c_{n+1} = 2a_n + 3b_n + \phantom{2}c_n \end{cases}, \quad \begin{cases} a_0 = 8 \\ b_0 = 3 \\ c_0 = 12 \end{cases}.$$

**3.** En yta har, med avseende på ett ortonormerat koordinatsystem för det tredimensionella rummet, ekvationen

$$2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 10x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3 = 1.$$

Bestäm dess typ, och ange de punkter på ytan, som ligger närmast origo.

**4.** De lineära avbildningarna $F$, $G$ och $H$ på ett tredimensionellt euklidiskt rum $V$ representeras av matriserna

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{respektive} \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -5 & -6 & -4 \\ 4 & 9 & 8 \\ -2 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

med avseende på en ortonormerad bas för $V$. Vilka av dem är ortogonala speglingar i något underrum $U$ till $V$? Ange för dessa underrummet $U$.

**5.** Formulera och bevisa dimensionssatsen.

**6.** Visa, att om $A$ är en diagonaliserbar kvadratisk matris annan än nollmatrisen, så är $A^n \neq 0$ för alla positiva heltal $n$.