



LUND  
UNIVERSITY

Written Examination  
Linear Algebra 2  
Saturday, 1 April 2017  
Duration: 08:00–13:00

Centre for Mathematical Sciences  
Mathematics, Faculty of Science

Turn the page for the Swedish text.

*No aids except writing utensils. The results will be posted on the noticeboard in the entrance hall on Tuesday, 4 April, at 12:00. Candidates can see their marked scripts from 12:30 to 13:00 on the same day in Room 503.*

1. Find the polynomial  $y = at^2 + bt + c$  that is the best least squares fit to the following data:

$$\begin{array}{c|cccc} t & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

2. A surface has, with respect to some coordinate system for 3-space, the equation

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 2.$$

Identify its type.

3. Find an orthogonal matrix  $T$  and a diagonal matrix  $D$  such that  $T^tAT = D$  where

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & -9 \end{bmatrix}.$$

4. The matrix of a linear transformation  $F$  on 3-space with respect to an orthonormal, positively oriented basis is

$$\frac{1}{21} \begin{bmatrix} 5 & -20 & 4 \\ 4 & 5 & 20 \\ -20 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Show that  $F$  is rotation about a line. Find the axis, the cosine of the angle and the direction of the rotation. Note that you need not specify the angle, only its cosine.

5. State and prove the Cauchy–Schwarz inequality.
6. a) Two matrices  $A$  and  $B$  are said to commute if  $AB = BA$ . Let  $A$  be a square matrix such that  $I + A$  is invertible. Show that  $I - A$  and  $(I + A)^{-1}$  commute.
- b) A matrix  $A$  is skew-symmetric if  $A^t = -A$ . Let  $A$  be such a matrix. It is well known and need not be proved that  $I + A$  is invertible. Show that the matrix  $(I - A)(I + A)^{-1}$  is orthogonal.
- c) Let  $A$  be an orthogonal square matrix such that  $I + A$  is invertible. Show that  $(I - A)(I + A)^{-1}$  is skew-symmetric.



LUNDS  
UNIVERSITET

Tentamensskrivning  
Lineär algebra 2  
Lördag den 1 april 2017  
Skrivtid: 08.00–13.00

Matematikcentrum

Matematik NF

Turn the page for the English text.

*Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Resultatet kommer att kungöras på anslagstavlan i entréhallen på tisdag den 4 april, kl. 12.00. Skrivningarna visas från 12.30 till 13.00 samma dag i rum 503.*

1. Bestäm det polynom  $y = at^2 + bt + c$ , som i minsta-kvadrat-mening ansluter så väl som möjligt till följande data:

$$\begin{array}{c|cccc} t & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

2. En yta har, med avseende på något koordinatsystem för det 3-dimensionella rummet, ekvationen

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 2.$$

Ange dess typ.

3. Ange en ortogonal matris  $T$  och en diagonal matris  $D$ , sådana att  $T^tAT = D$ , där

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & -9 \end{bmatrix}.$$

4. Matrisen för en linjär avbildning  $F$  på det 3-dimensionella rummet med avseende på en ortonormerad, positivt orienterad bas är

$$\frac{1}{21} \begin{bmatrix} 5 & -20 & 4 \\ 4 & 5 & 20 \\ -20 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Visa, att  $F$  är rotation kring en linje. Bestäm rotationsaxeln, cosinus av rotationsvinkeln och riktningen hos rotationen. Märk väl, att du inte behöver ange vinkeln, bara cosinus av den.

5. Formulera och bevisa Cauchy–Schwarz olikhet.
6. a) Två matriser  $A$  och  $B$  sägs kommutera, om  $AB = BA$ . Låt  $A$  vara en kvadratisk matris, sådan att  $I + A$  är inverterbar. Visa, att  $I - A$  och  $(I + A)^{-1}$  kommuterar.  
b) En matris  $A$  är skevsymmetrisk, om  $A^t = -A$ . Låt  $A$  vara en sådan matris. Det är välkänt och behöver inte bevisas, att  $I + A$  är inverterbar. Visa, att matrisen  $(I - A)(I + A)^{-1}$  är ortogonal.  
c) Låt  $A$  vara en ortogonal kvadratisk matris, sådan att  $I + A$  är inverterbar. Visa, att  $(I - A)(I + A)^{-1}$  är skevsymmetrisk.