LUND UNIVERSITY

Written Examination
Linear Algebra 2
Thursday, 16 March 2017
Duration: 08:00–13:00

Centre for Mathematical Sciences
Mathematics, Faculty of Science

Turn the page for the Swedish text.

No aids except writing utensils. *The results will be posted on the noticeboard in the entrance hall on Tuesday, 21 March, at 12:00. Candidates can see their marked scripts from 12:30 to 13:00 on the same day in Room 309 C.*

1. Find the polynomial $y = at + b$ that is the best least squares fit to the following data:

t	0	1	2	3
y	3	5	8	10

2. Derive an expression for A^n where n is a positive integer and

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. A surface has, with respect to an orthonormal coordinate system for 3-space, the equation

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 1.$$

Show that it is a surface of revolution and identify its type. Also find the axis of revolution.

4. Let

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ a & b & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

be the matrix of a linear transformation F on $\mathbf{R}^3$ with respect to an orthonormal basis. Determine the real numbers a and b so that F becomes orthogonal projection onto a subspace of $\mathbf{R}^3$ and specify that subspace.

5. What are the algebraic and the geometric multiplicity of an eigenvalue of a linear transformation on a non-zero finite dimensional linear space? State and derive the relation between them.

6. A skew-symmetric matrix is a square matrix A for which $A^t = -A$. Show that $A + I$ is invertible if A is such a matrix. *Hint:* Make use of the fact that $\boldsymbol{x}^t(A + I)\boldsymbol{x} = 0$ if $(A + I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Tentamensskrivning
Lineär algebra 2
Torsdag den 16 mars 2017
Skrivtid: 08.00–13.00

Turn the page for the English text.

Inga hjälpmedel förutom skrivdon. *Resultatet kommer att kungöras på anslagstavlan i entréhallen på tisdag den 21 mars kl. 12.00. Skrivningarna visas från 12.30 till 13.00 samma dag i rum 309 C.*

1. Bestäm det polynom $y = at + b$, som i minsta-kvadrat-mening ansluter så väl som möjligt till följande data:

t	0	1	2	3
y	3	5	8	10

2. Härled ett uttryck för A^n, där n är ett positivt heltal och

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. En yta har, med avseende på ett ortonormerat koordinatsystem för det 3-dimensionella rummet, ekvationen

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 1.$$

Visa, att ytan är en rotationsyta, och ange dess typ. Ange också rotationsaxeln.

4. Låt

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ a & b & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

vara matrisen för en lineär avbildning F på $\mathbf{R}^3$ med avseende på en ortonormerad bas. Bestäm de reella talen a och b så, att F blir ortogonal projektion på ett underrum till $\mathbf{R}^3$, och ange detta underrum.

5. Vad är den algebraiska och den geometriska multipliciteten hos ett egenvärde till en lineär avbildning på ett icke-trivialt ändligdimensionellt lineärt rum? Ange och härled relationen mellan dem.

6. En skevsymmetrisk matris är en kvadratisk matris A, sådan att $A^t = -A$. Visa, att $A + I$ är inverterbar om A är en sådan matris. *Ledning:* Använd, att $\boldsymbol{x}^t(A + I)\boldsymbol{x} = 0$ om $(A + I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.