LUND UNIVERSITY

Written Examination
Linear Algebra 2
Saturday, 12 November 2016
Duration: 08:00–13:00

Centre for Mathematical Sciences
Mathematics, Faculty of Science

Turn the page for the Swedish text.

No aids except pens, pencils and erasers. *The results will be posted on the notice-board in the entrance hall on Wednesday, 16 November, at 12:00. The viewing of marked scripts takes place from 12:30 to 13:00 on the same day in Room 503.*

1. Solve the recurrence problem

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 4b_n \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_0 = 20 \\ b_0 = 27 \end{cases}.$$

2. Find an orthonormal basis for the image of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. A surface has, with respect to some coordinate system for 3-space, the equation

$$x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 29.$$

Identify the type of surface.

4. Let

$$d\begin{bmatrix} 2 & -6 & 9 \\ a & b & c \\ 9 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

be the matrix of a linear transformation F on 3-space with respect to an orthonormal basis. Determine the real numbers a, b, c and d so that F becomes an orthogonal reflection in a plane and find that plane.

5. Let A be a square matrix of order n. Show that A is invertible if and only if there exists, for every $n \times 1$ matrix Y, a unique $n \times 1$ matrix X such that $AX = Y$.

6. Let A be a diagonalisable square matrix of order n and let

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

be its characteristic polynomial.

a) Show that

$$((-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

if $\boldsymbol{u}$ is an eigenvector of A.

b) Show that

$$(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0.$$

LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik NF

Tentamensskrivning
Lineär algebra 2
Lördag den 12 november 2016
Skrivtid: 08.00–13.00

Turn the page for the English text.

Inga hjälpmedel förutom pennor och radergummin. *Resultatet kommer att kungöras på anslagstavlan i entréhallen på onsdag den 16 november kl. 12.00. Skrivningsvisningen äger rum från 12.30 till 13.00 samma dag i rum 503.*

1. Lös rekursionsproblemet

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 4b_n \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_0 = 20 \\ b_0 = 27 \end{cases}.$$

2. Ange en ortonormerad bas för värderummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. En yta har, med avseende på något koordinatsystem för det 3-dimensionella rummet, ekvationen

$$x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 29.$$

Ange ytans typ.

4. Låt

$$d \begin{bmatrix} 2 & -6 & 9 \\ a & b & c \\ 9 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

vara matrisen för en lineär avbildning F på det 3-dimensionella rummet med avseende på en ortonormerad bas. Bestäm de reella talen a, b, c och d så, att F blir en ortogonal spegling i ett plan, och ange detta plan.

5. Låt A vara en kvadratisk matris av ordningen n. Visa, att A är inverterbar om och endast om det till varje $(n \times 1)$-matris Y finns en entydigt bestämd $(n \times 1)$-matris X, sådan att $AX = Y$.

6. Låt A vara en diagonaliserbar kvadratisk matris av ordningen n, och låt

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

vara dess karakteristiska polynom.

a) Visa, att $((-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, om $\boldsymbol{u}$ är en egenvektor till A.

b) Visa, att $(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$.