LUND UNIVERSITY

Centre for Mathematical Sciences
Mathematics, Faculty of Science

Written Examination
Linear Algebra 2
Monday, 22 August 2016
Duration: 08:00–13:00

Turn the page for the Swedish text.

No aids. The results will be posted on Wednesday, 24 August, at 13:00. The viewing of marked scripts takes place from 13:15 to 14:00 on the same day in Room 503.

1. Solve the recurrence problem

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 2b_n \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_0 = -3 \\ b_0 = 4 \end{cases}.$$

2. Find the orthogonal projection of the vector $\boldsymbol{u} = (1, 3, 1, 1, -1)$ onto the subspace U of $\mathbf{R}^5$ spanned by the vectors $(1, 1, 1, 1, 1)$ and $(1, -1, 1, -1, 5)$, and compute the minimum distance from $\boldsymbol{u}$ to U.

3. A quadratic form q on $\mathbf{R}^3$ is defined by

$$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Find the minimum and maximum values of $q(\boldsymbol{x})$ subject to the constraint

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2.$$

4. A linear transformation F on $\mathbf{R}^3$ is defined by $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ where

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \\ -6 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Show that F is a projection on a subspace U' of $\mathbf{R}^3$ along a subspace U'' of $\mathbf{R}^3$ and find the two subspaces.

5. What is an isometry? Show that isometries preserve inner products and angles.

6. Let A be a symmetric square matrix of order n and suppose that A has an eigenvalue of algebraic multiplicity at least 2. If $\boldsymbol{u}$ is any vector in $\mathbf{R}^n$, show that the vectors

$$\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}, \ldots, A^{n-1}\boldsymbol{u}$$

are linearly dependent.

LUNDS UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Lineär algebra 2
Måndag den 22 augusti 2016
Skrivtid: 08.00–13.00

Matematikcentrum
Matematik NF

Turn the page for the English text.

Inga hjälpmedel. Resultatet anslås på onsdag den 24 augusti kl. 13.00. Skrivningsvisningen äger rum från 13.15 till 14.00 samma dag i rum 503.

1. Lös rekursionsproblemet

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 2b_n \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_0 = -3 \\ b_0 = 4 \end{cases}.$$

2. Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $\boldsymbol{u} = (1, 3, 1, 1, -1)$ på det underrum U till $\mathbf{R}^5$, som spänns upp av vektorerna $(1, 1, 1, 1, 1)$ och $(1, -1, 1, -1, 5)$, och beräkna det minsta avståndet från $\boldsymbol{u}$ till U.

3. En kvadratisk form q på $\mathbf{R}^3$ definieras genom

$$q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Bestäm de minsta och största värdena av $q(\boldsymbol{x})$ under villkoret

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2.$$

4. En lineär avbildning F på $\mathbf{R}^3$ definieras genom $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, där

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \\ -6 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Visa, att F är en projektion på ett underrum U' till $\mathbf{R}^3$ längs ett underrum U'' till $\mathbf{R}^3$, och bestäm de båda underrummen.

5. Vad är en isometri? Visa, att isometrier bevarar skalärprodukter och vinklar.

6. Låt A vara en symmetrisk kvadratisk matris av ordning n, och antag, att A har ett egenvärde med algebraisk multiplicitet minst 2. Om $\boldsymbol{u}$ är en godtycklig vektor i $\mathbf{R}^n$, visa, att vektorerna

$$\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}, \ldots, A^{n-1}\boldsymbol{u}$$

är lineärt beroende.