LUNDS UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Lineär algebra 2
Lördag den 16 april 2016
Skrivtid: 08.00–13.00

Matematikcentrum
Matematik NF

Turn the page for the English text.

Inga hjälpmedel.

1. Bestäm det polynom $y = at^2 + bt + c$, som i minsta-kvadrat-mening ansluter så väl som möjligt till följande data:

t	0	1	2	3
y	0	2	4	10

2. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1(0) = 15 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}.$$

3. Ange typen av den yta, som representeras av ekvationen

$$x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 4$$

med avseende på något koordinatsystem för det 3-dimensionella rummet.

4. En lineär avbildning F på $\mathbf{R}^3$ är definierad genom $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, där

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Visa, att F är spegling i ett underrum U' till $\mathbf{R}^3$ längs ett underrum U'' till $\mathbf{R}^3$, och bestäm de två underrummen.

5. Låt F vara en symmetrisk lineär avbildning på ett euklidiskt rum. Visa, att två egenvektorer till F hörande till olika egenvärden är ortogonala mot varandra.

6. **a)** Visa, att

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}\,(A^t B)$$

definierar en skalärprodukt på det lineära rummet M_n av $n \times n$-matriser. Vi påminner om att spåret $\mathrm{tr}\,(A)$ av en kvadratisk matris A är summan av elementen på huvuddiagonalen i A.

b) Bestäm en ortonormerad bas för det underrum till M_2, som spänns upp av

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

LUND UNIVERSITY

Written Examination
Linear Algebra 2
Saturday, 16 April 2016
Duration: 08:00–13:00

Centre for Mathematical Sciences
Mathematics, Faculty of Science

Turn the page for the Swedish text.

No aids.

1. Find the polynomial $y = at^2 + bt + c$ that is the best least squares fit to the following data:

t	0	1	2	3
y	0	2	4	10

2. Solve the initial value problem

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1(0) = 15 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}.$$

3. Identify the type of surface represented by the equation

$$x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 4$$

with respect to some coordinate system for 3-space.

4. A linear transformation F on $\mathbf{R}^3$ is defined by $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ where

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Show that F is reflection in a subspace U' of $\mathbf{R}^3$ along a subspace U'' of $\mathbf{R}^3$ and find the two subspaces.

5. Let F be a symmetric linear transformation on an inner product space. Show that two eigenvectors of F belonging to different eigenvalues are orthogonal to each other.

6. **a)** Show that

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\,(A^tB)$$

defines an inner product on the linear space M_n of $n \times n$ matrices. We remind that the trace $\mathrm{tr}\,(A)$ of a square matrix A is the sum of the main diagonal entries of A.

b) Find an orthonormal basis for the subspace of M_2 spanned by

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$