LUNDS UNIVERSITET

Tentamensskrivning
Lineär algebra 2
Torsdag den 17 mars 2016
Skrivtid: 08.00–13.00

Matematikcentrum
Matematik NF

Turn the page for the English text.

För att deltaga i tentamen måste man vara registrerad på kursen. Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv bara på en sida av varje papper. Fyll i omslaget fullständigt. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar.

1. Ange det polynom $y = at+b$, som i minsta-kvadrat-mening ansluter så väl som möjligt till följande data:

t	0	1	2	3
y	1	2	2	3

2. Lös rekursionsproblemet

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 5a_n + 4b_n \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 20 \end{cases}.$$

3. Ange typen av den yta, som har ekvationen

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 4$$

med avseende på ett ortonormerat koordinatsystem för rummet. Ange också det minsta avståndet från origo till ytan.

4. En lineär avbildning F på ett tredimensionellt euklidiskt rum har, med avseende på en ortonormerad, positivt orienterad bas, matrisen

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -7 \\ 8 & 1 & 4 \\ -1 & -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Visa att F är rotation kring en linje. Ange rotationsaxeln, rotationsvinkeln och rotationsriktningen.

5. Visa att en kvadratisk matris är inverterbar om och endast om dess determinant är skild från noll.

6. **a)** Visa att

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \boldsymbol{f}(-1)\boldsymbol{g}(-1) + \boldsymbol{f}(0)\boldsymbol{g}(0) + \boldsymbol{f}(1)\boldsymbol{g}(1)$$

definierar en skalärprodukt på det lineära rummet P_2 av polynom av grad högst 2.

b) Bestäm en ortonormerad bas för P_2 med skalärprodukten ovan till exempel genom att tillämpa Gram–Schmidts ortogonaliseringsmetod på polynomen 1, t, t^2.

LUND UNIVERSITY

Written Examination
Linear Algebra 2
Thursday, 17 March 2016
Duration: 08:00–13:00

Centre for Mathematical Sciences
Mathematics, Faculty of Science

Turn the page for the Swedish text.

In order to sit for the examination, you must be enrolled in the course. No aids. Use the papers provided by the department and write only on one side of each page. Fill in the cover completely. Write legibly. Provide short and concise arguments.

1. Find the polynomial $y = at + b$ that is the best least squares fit to the following data:

t	0	1	2	3
y	1	2	2	3

2. Solve the recurrence problem

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = 5a_n + 4b_n \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 20 \end{cases}.$$

3. A surface has, with respect to an orthonormal coordinate system for 3-space, the equation

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 4.$$

Identify the type of surface and find the least distance from the origin to the surface.

4. A linear transformation F on a 3-dimensional inner product space has, with respect to an orthonormal, positively oriented basis, the matrix

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & -7 \\ 8 & 1 & 4 \\ -1 & -8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Show that F is a rotation about a line. Find the axis, angle and direction of the rotation.

5. Show that a square matrix is invertible if and only if its determinant is non-zero.

6. a) Show that

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \boldsymbol{f}(-1)\boldsymbol{g}(-1) + \boldsymbol{f}(0)\boldsymbol{g}(0) + \boldsymbol{f}(1)\boldsymbol{g}(1)$$

defines an inner product on the linear space P_2 of polynomials of degree at most 2.

b) Find an orthonormal basis for P_2 with the above inner product, for example by applying the Gram–Schmidt orthogonalisation process to the polynomials 1, t, t^2.